1. feladat (14 pont)

Legyen $z = \sqrt{12} - 2i$. Határozza meg a

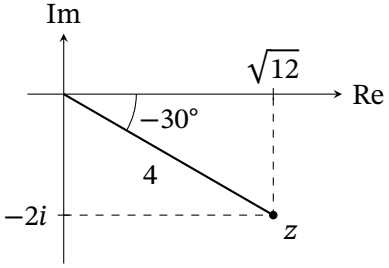
$$\frac{z-i}{\overline{z}-i}, \qquad \text{és} \qquad \sqrt{iz}$$

komplex számok valós és képzetes részét!

Megoldás.

$$\frac{z-i}{\overline{z}-i} = \frac{\sqrt{12}-3i}{\sqrt{12}+i} = \frac{(\sqrt{12}-3i)(\sqrt{12}-i)}{(\sqrt{12}+i)(\sqrt{12}-i)} = \frac{12-3-4\sqrt{12}i}{13}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-i}{\overline{z}-i}\right) = \frac{9}{13} \quad \text{és} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{z-i}{\overline{z}-i}\right) = -\frac{8\sqrt{3}}{13}.$$



$|z| = 4$, $\arg z = -30°$, vagyis $z = 4\left(\cos(-30°) + i\sin(-30°)\right)$.

$$\begin{aligned}\sqrt{iz} &= \sqrt{(\cos 90° + i\sin 90°)\cdot 4\left(\cos(-30°) + i\sin(-30°)\right)} = \sqrt{4(\cos 60° + i\sin 60°)} \\ &= 2\left(\cos(30° + k\cdot 180°) + i\sin(30° + k\cdot 180°)\right), \quad k = 0, 1\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}\left(\sqrt{iz}\right) = \pm\sqrt{3}, \quad \operatorname{Im}\left(\sqrt{iz}\right) = \pm 1.$$

2. feladat (14 pont)

Írja le az algebra alaptételét!

Határozza meg a

$$z^4 + 3iz^3 + 4z^2$$

polinom komplex gyökeit, és írja fel a gyöktényezős alakját!

Megoldás.

Az algebra alaptétele (bármelyik változata elfogadható): minden legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.

$$0 = z^4 + 3iz^3 + 4z^2 = z^2\left(z^2 + 3iz + 4\right).$$

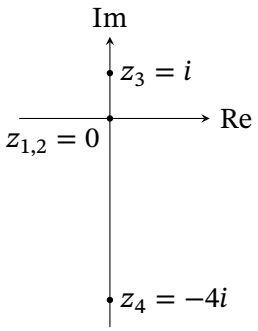
A megoldások $z_{1,2} = 0$, és

$$z_{3,4} = \frac{-3i \pm \sqrt{(3i)^2 - 4\cdot 4}}{2} = \frac{-3i \pm \sqrt{-25}}{2} = \frac{-3i \pm 5i}{2},$$

azaz $z_3 = i$ és $z_4 = -4i$.

A gyöktényezős alak: $z^4 + 3iz^3 + 4z^2 = z^2(z-i)(z+4i)$.

A gyökök a komplex számsíkon:



3. feladat (16 + 16 = 32 pont)

Határozza meg az

a) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^2+3n}{2n^3-n+1}}$;

b) $b_n = \left(\dfrac{n^2+2}{n^2-5}\right)^{2n^2+3}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás.

a)

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{4}{n}} = \sqrt[n]{\frac{4n^2}{n^3}} \geq \sqrt[n]{\frac{n^2+3n}{2n^3-n+1}} \geq \sqrt[n]{\frac{n^2}{2n^3}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2n}} \to 1,$$

így a rendőrelv miatt $a_n \to 1$.

b)

$$b_n = \left(\frac{1+2/n^2}{1-5/n^2}\right)^{2n^2+3} = \frac{\left(\left(1+2/n^2\right)^{n^2}\right)^2}{\left(\left(1-5/n^2\right)^{n^2}\right)^2} \cdot \frac{\left(1+2/n^2\right)^3}{\left(1-5/n^2\right)^3} \longrightarrow \frac{\left(e^2\right)^2}{\left(e^{-5}\right)^2} \cdot \frac{1}{1} = e^{14}$$

4. feladat (16 pont)

Határozza meg a

$$c_n = \frac{(-6)^{n+1} + n^3 \cdot 2^{2n-1}}{3^{n+1} \cdot 2^{n-1} + n}$$

sorozat határértékét, ha létezik!

Megoldás.

$$c_n = \frac{-6 \cdot (-6)^n + \frac{n^3 4^n}{2}}{\frac{3}{2} \cdot 6^n + n}$$

$$c_{2n} = \frac{-6 \cdot 36^n + 4n^3 16^n}{1{,}5 \cdot 36^n + 2n} = \frac{-6 + 4n^3 \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1{,}5 + \frac{2n}{36^n}} \to -4$$

$$c_{2n-1} = \frac{36^n + \frac{(2n-1)^3 16^n}{8}}{0{,}25 \cdot 36^n + 2n - 1} = \frac{1 + \frac{(2n-1)^3}{8}\left(\frac{4}{9}\right)^n}{0{,}25 + \frac{2n-1}{36^n}} \to 4$$

Minden elem szerepel valamelyik részsorozatban, így 2 torlódási pont van: ± 4. $\limsup c_n = 4$, $\liminf c_n = -4$, a határérték nem létezik.

5. feladat (24 pont)

Legyen $a_1 = 13$ és $a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2 + 8}{3}}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén!

Vizsgálja a rekurzióval adott sorozatot monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából!

$$\inf a_n = ? \qquad \sup a_n = ? \qquad \lim a_n = ?$$

Megoldás.

Teljes indukcióval belátjuk, hogy $2 \le a_n$ minden n-re.

$n = 1$ esetén $2 \le a_1 = 13$ teljesül.

Ha $2 \le a_n$, akkor $4 \le a_n^2$, $12 \le a_n^2 + 8$ és $4 \le \frac{a_n^2+8}{3}$, tehát $2 \le \sqrt{\frac{a_n^2+8}{3}} = a_{n+1}$.

Megmutatjuk, hogy $a_n \ge a_{n+1}$ minden n-re.

Már beláttuk, hogy $a_n \ge 2$. Innen $2a_n^2 \ge 8$, $3a_n^2 \ge a_n^2 + 8$, $a_n^2 \ge \frac{a_n^2+8}{3}$. Mivel a_n pozitív, ezért gyökvonás után kapjuk az állítást.

Mivel a_n monoton csökkenő, így felülről korlátos, és $\sup a_n = a_1 = 13$.

Megmutattuk, hogy a_n monoton és korlátos, így a konvergencia elégséges feltétele miatt konvergens.

Legyen $A = \lim a_n \in \mathbb{R}$! Felhasználva a részsorozat határértékére és a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeket, kapjuk az $A = \sqrt{\frac{A^2+8}{3}}$ egyenletet.

Mivel a_n monoton csökken, ezért $\inf a_n = \lim a_n = 2$.

6. feladat (2 + 2 + 1 + 3 = 8 pont, IMSC-seknek javasolt)

Írjunk az n tízes számrendszerben felírt alakja elé tizedes pontot, és ez elé egy 0 számjegyet. A kapott véges tizedes tört legyen a_n. (Azaz $a_n = 0.n$)

a) Adja meg az a_n sorozat olyan részsorozatát, aminek határértéke 1!

b) Adja meg az a_n sorozat olyan részsorozatát, aminek határértéke 0!

c) Adja meg az a_n sorozat olyan részsorozatát, aminek határértéke 0.5!

   Ha valamelyik nem létezik, indokolja!

d) Adja meg az a_n sorozat torlódási pontjainak halmazát!

Megoldás.

a) $\varphi(n) = 10^n - 1$ esetén $a_{\varphi(n)} = \frac{10^n-1}{10^n} = 1 - 10^{-n} \to 1$.

b) Ilyen nincs, mert $a_n \geq 0.1$ minden n-re.

c) $\varphi(n) = 5 \cdot 10^{n-1}$ esetén $a_{\varphi(n)} = 0.5 \to 0.5$.

d) Jelölje TP a torlódási pontok halmazát. Mivel $0.1 \leq a_n \leq 1$ minden n-re, ezért $TP \subset [0.1, 1]$.

$A \in [0.1, 1[$ esetén legyen $\varphi(n) = \lfloor A \cdot 10^n \rfloor$. Ekkor $a_{\varphi(n)} \to A$.

Az a) rész miatt $TP = [0.1, 1]$.