1. feladat (14 pont)

Legyen $z = \sqrt{12} + 2i$. Határozza meg a

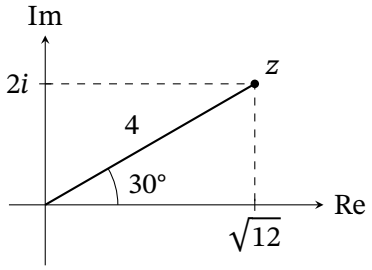
$$\frac{z+i}{\overline{z}+i}, \qquad \text{és} \qquad \sqrt{iz}$$

komplex számok valós és képzetes részét!

Megoldás.

$$\frac{z+i}{\overline{z}+i} = \frac{\sqrt{12}+3i}{\sqrt{12}-i} = \frac{(\sqrt{12}+3i)(\sqrt{12}+i)}{(\sqrt{12}-i)(\sqrt{12}+i)} = \frac{12-3+4\sqrt{12}i}{13}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+i}{\overline{z}+i}\right) = \frac{9}{13} \quad \text{és} \quad \mathrm{Im}\left(\frac{z+i}{\overline{z}+i}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{13}.$$



$|z| = 4$, $\arg z = 30°$, vagyis $z = 4(\cos 30° + i \sin 30°)$.

$$\begin{aligned}\sqrt{iz} &= \sqrt{(\cos 90° + i \sin 90°) \cdot 4(\cos 30° + i \sin 30°)} = \sqrt{4(\cos 120° + i \sin 120°)} \\ &= 2\left(\cos(60° + k \cdot 180°) + i \sin(60° + k \cdot 180°)\right), \quad k = 0, 1\end{aligned}$$

$$\mathrm{Re}\left(\sqrt{iz}\right) = \pm 1, \quad \mathrm{Im}\left(\sqrt{iz}\right) = \pm\sqrt{3}.$$

2. feladat (14 pont)

Írja le az algebra alaptételét!

Határozza meg a

$$z^4 - 2iz^3 + 3z^2$$

polinom komplex gyökeit, és írja fel a gyöktényezős alakját!

Megoldás.

Az algebra alaptétele (bármelyik változata elfogadható): minden legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.

$$0 = z^4 - 2iz^3 + 3z^2 = z^2\left(z^2 - 2iz + 3\right).$$

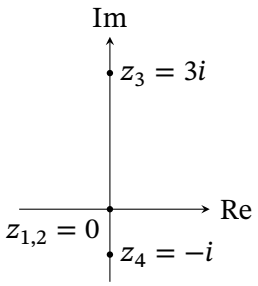
A megoldások $z_{1,2} = 0$, és

$$z_{3,4} = \frac{2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2i \pm 4i}{2},$$

azaz $z_3 = 3i$ és $z_4 = -i$.

A gyöktényezős alak: $z^4 - 2iz^3 + 3z^2 = z^2(z-3i)(z+i)$.

A gyökök a komplex számsíkon:



3. feladat (16 + 16 = 32 pont)

Határozza meg az

a) $a_n = \left(\dfrac{n^2+2}{n^2-5}\right)^{2n^2+3}$;

b) $b_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^2+3n}{2n^3-n+1}}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás.

a)

$$a_n = \left(\frac{1+2/n^2}{1-5/n^2}\right)^{2n^2+3} = \frac{\left(\left(1+2/n^2\right)^{n^2}\right)^2}{\left(\left(1-5/n^2\right)^{n^2}\right)^2} \cdot \frac{\left(1+2/n^2\right)^3}{\left(1-5/n^2\right)^3} \longrightarrow \frac{\left(e^2\right)^2}{\left(e^{-5}\right)^2} \cdot \frac{1}{1} = e^{14}$$

b)

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{4}{n}} = \sqrt[n]{\frac{4n^2}{n^3}} \geq \sqrt[n]{\frac{n^2+3n}{2n^3-n+1}} \geq \sqrt[n]{\frac{n^2}{2n^3}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2n}} \to 1,$$

így a rendőrelv miatt $b_n \to 1$.

4. feladat (16 pont)

Határozza meg a

$$c_n = \frac{(-10)^{n-1} + n^2 \cdot 3^{2n+2}}{5^{n-1} \cdot 2^{n+1} + 1}$$

sorozat határértékét, ha létezik!

Megoldás.

$$c_n = \frac{-0{,}1 \cdot (-10)^n + 9n^2 9^n}{0{,}4 \cdot 10^n + 1}$$

$$c_{2n} = \frac{-0{,}1 \cdot 100^n + 36n^2 81^n}{0{,}4 \cdot 100^n + 1} = \frac{-0{,}1 + 36n^2 (0{,}81)^n}{0{,}4 + 0{,}01^n} \to -0{,}25$$

$$c_{2n-1} = \frac{0{,}01 \cdot 100^n + (2n-1)^2 81^n}{0{,}04 \cdot 100^n + 1} = \frac{0{,}01 + (2n-1)^2 (0{,}81)^n}{0{,}04 + 0{,}01^n} \to 0{,}25$$

Minden elem szerepel valamelyik részsorozatban, így 2 torlódási pont van: $\pm 0{,}25$. $\limsup c_n = 0{,}25$, $\liminf c_n = -0{,}25$, a határérték nem létezik.

5. feladat (24 pont)

Legyen $a_1 = 11$ és $a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2 + 9}{2}}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén!

Vizsgálja a rekurzióval adott sorozatot monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából!

$$\inf a_n = ? \qquad \sup a_n = ? \qquad \lim a_n = ?$$

Megoldás.

Teljes indukcióval belátjuk, hogy $3 \le a_n$ minden n-re.

$n = 1$ esetén $3 \le a_1 = 11$ teljesül.

Ha $3 \le a_n$, akkor $9 \le a_n^2$, $18 \le a_n^2 + 9$ és $9 \le \frac{a_n^2+9}{2}$, tehát $3 \le \sqrt{\frac{a_n^2+9}{2}} = a_{n+1}$.

Megmutatjuk, hogy $a_n \ge a_{n+1}$ minden n-re.

Már beláttuk, hogy $a_n \ge 3$. Innen $a_n^2 \ge 9$, $2a_n^2 \ge a_n^2 + 9$, $a_n^2 \ge \frac{a_n^2+9}{2}$. Mivel a_n pozitív, ezért gyökvonás után kapjuk az állítást.

Mivel a_n monoton csökkenő, így felülről korlátos, és $\sup a_n = a_1 = 11$.

Megmutattuk, hogy a_n monoton és korlátos, így a konvergencia elégséges feltétele miatt konvergens.

Legyen $A = \lim a_n \in \mathbb{R}$! Felhasználva a részsorozat határértékére és a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeket, kapjuk az $A = \sqrt{\frac{A^2+9}{2}}$ egyenletet.

Mivel a_n monoton csökken, ezért $\inf a_n = \lim a_n = 3$.

6. feladat (2 + 2 + 1 + 3 = 8 pont, IMSC-seknek javasolt)

Írjunk az n tízes számrendszerben felírt alakja elé tizedes pontot, és ez elé egy 0 számjegyet. A kapott véges tizedes tört legyen a_n. (Azaz $a_n = 0.n$)

a) Adja meg az a_n sorozat olyan részsorozatát, aminek határértéke 1!

b) Adja meg az a_n sorozat olyan részsorozatát, aminek határértéke 0!

c) Adja meg az a_n sorozat olyan részsorozatát, aminek határértéke 0.5!

Ha valamelyik nem létezik, indokolja!

d) Adja meg az a_n sorozat torlódási pontjainak halmazát!

Megoldás.

a) $\varphi(n) = 10^n - 1$ esetén $a_{\varphi(n)} = \frac{10^n-1}{10^n} = 1 - 10^{-n} \to 1$.

b) Ilyen nincs, mert $a_n \ge 0.1$ minden n-re.

c) $\varphi(n) = 5 \cdot 10^{n-1}$ esetén $a_{\varphi(n)} = 0.5 \to 0.5$.

d) Jelölje TP a torlódási pontok halmazát. Mivel $0.1 \leq a_n \leq 1$ minden n-re, ezért $TP \subset [0.1, 1]$.

$A \in [0.1, 1[$ esetén legyen $\varphi(n) = \lfloor A \cdot 10^n \rfloor$. Ekkor $a_{\varphi(n)} \to A$.

Az a) rész miatt $TP = [0.1, 1]$.