1. feladat (10 pont)

Határozza meg a

$$\frac{3-3i}{2+i}, \qquad \text{és} \qquad (3-3i)+\overline{(2+i)}$$

komplex számok valós és képzetes részét!

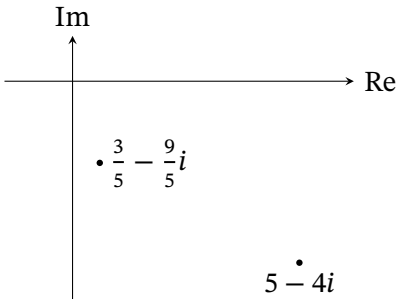
Megoldás.

$$\frac{3-3i}{2+i}=\frac{(3-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{6+3i^2-3i-6i}{4-i^2},$$

ezért $\operatorname{Re}\left(\frac{3-3i}{2+i}\right)=\frac{3}{5}$ és $\operatorname{Im}\left(\frac{3-3i}{2+i}\right)=-\frac{9}{5}$.

$$\operatorname{Re}\left(3-3i+\overline{2+i}\right)=5, \quad \operatorname{Im}\left(3-3i+\overline{2+i}\right)=-4.$$

A kapott számok a komplex számsíkon:



2. feladat (18 pont)

Határozza meg a

$$z^4-16 \qquad \text{és} \qquad z^5-27iz^2$$

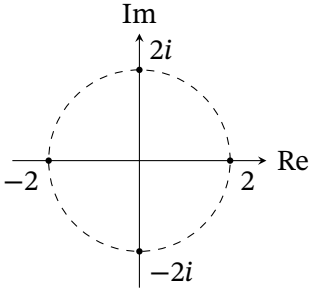
polinomok komplex gyökeit algebrai alakban!

Megoldás.

A $0=z^4-16$ egyenlet megoldásai, mivel $16=16(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)$, a gyökvonás képletével

$$z_k=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{0^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}+i\sin\frac{0^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}\right)=2\left(\cos(k\cdot 90^\circ)+i\sin(k\cdot 90^\circ)\right) \quad (k=0,1,2,3),$$

azaz ± 2 és $\pm 2i$:

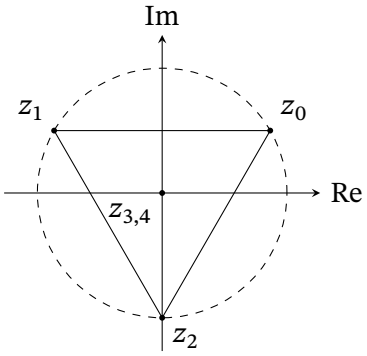


A $0 = z^5 - 27iz^2 = (z^3 - 27i)z^2$ egyenlet megoldásai

$$z_k = \sqrt[3]{27i} = 3\sqrt[3]{\cos 90° + i \sin 90°} = 3\,(\cos(30° + k \cdot 120°) + i \sin(30° + k \cdot 120°)) \quad (k = 0, 1, 2),$$

azaz $z_{0,1} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$, $z_2 = -3i$ és $z_{3,4} = 0$.

A gyökök a komplex számsíkon:



3. feladat (16 + 16 = 32 pont)

Határozza meg az

a) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2^n + 3^n}{n^2 + n^3}}$;

b) $b_n = \left(\dfrac{2n+3}{2n-5}\right)^{3n+3}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás.

a)

$$3 \leftarrow \frac{3}{\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n^3}} = \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^3 + n^3}} \le a_n \le \sqrt[n]{\frac{3^n + 3^n}{1}} = \sqrt[n]{2} \cdot 3 \to 3,$$

így a rendőrelv miatt $a_n \to 3$.

b)

$$b_n = \left(\frac{1 + \frac{4{,}5}{3n}}{1 - \frac{7{,}5}{3n}}\right)^{3n} \left(\frac{2n+3}{2n-5}\right)^3 \to \frac{e^{4{,}5}}{e^{-7{,}5}} \cdot 1 = e^{12}$$

4. feladat (16 pont)

Mondja ki a rendőrelv valamelyik változatát!

Határozza meg a

$$c_n = \frac{(-2)^{5n} + (-2)^{-5n}}{(-2)^{4n} + (-2)^{-4n}}$$

sorozat határértékét, ha létezik!

Megoldás.

A rendőrelv (bármelyik változata elfogadható, akár a speciális is): ha $a_n \le b_n \le c_n$ elég nagy n-re, és $a_n \to A$, $c_n \to A$, akkor $b_n \to A$.

$$c_n = \frac{(-32)^n + \frac{1}{(-32)^n}}{16^n + \frac{1}{16^n}} = \frac{(-2)^n + \frac{1}{(-512)^n}}{1 + \frac{1}{256^n}}$$

$$c_{2n} = \frac{2^{2n} + \frac{1}{512^{2n}}}{1 + \frac{1}{256^{2n}}} \to \infty$$

$$c_{2n-1} = \frac{-2^{2n-1} - \frac{1}{512^{2n-1}}}{1 + \frac{1}{256^{2n-1}}} \to -\infty$$

Minden elem szerepel valamelyik részsorozatban, így 2 torlódási pont van: $\pm\infty$. $\limsup c_n = \infty$, $\liminf c_n = -\infty$, a határérték nem létezik.

5. feladat (24 pont)

Legyen $a_1 = 3$ és $a_{n+1} = \sqrt[3]{5a_n^2 - 4a_n}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén!

Vizsgálja a rekurzióval adott sorozatot korlátosság, monotonitás és konvergencia szempontjából!

Megoldás.

Az $A = \sqrt[3]{5A^2 - 4A}$ egyenlet megoldásai $A_1 = 0$, $A_2 = 1$ és $A_3 = 4$.

Teljes indukcióval belátjuk, hogy $1 \le a_n \le 4$ minden n-re.

$n = 1$ esetén $1 \le a_1 = 3 \le 4$ teljesül.

Ha $1 \le a_n \le 4$, akkor $1 \le 5a_n - 4 \le 16$, ezért $1 \le a_n(5a_n - 4) = 5a_n^2 - 4a_n \le 64$, tehát $1 \le \sqrt[3]{5a_n^2 - 4a_n} = a_{n+1} \le 4$.

Megmutatjuk, hogy $a_n \le a_{n+1}$ minden n-re.

Köbre emelés után $a_n^3 \le 5a_n^2 - 4a_n$, azaz $a_n(a_n^2 - 5a_n + 4) = a_n^3 - 5a_n^2 + 4a_n \le 0$, ami teljesül, mivel $a_n > 0$ és $a_n^2 - 5a_n + 4 \le 0$ az előbbi korlátok között.

Megmutattuk, hogy a_n monoton és korlátos, így a konvergencia elégséges feltétele miatt konvergens.

Legyen $A = \lim a_n \in \mathbb{R}$! Felhasználva a részsorozat határértékére és a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeket, kapjuk az $A = \sqrt[3]{5A^2 - 4A}$ egyenletet.

Mivel a_n monoton növő, ezért $A \ge a_1 = 3$, így a fenti gyökök közül csak az $A_3 = 4$ lehet a határérték.

6. feladat (4 + 4 = 8 pont, IMSC-seknek javasolt)

a) Számolja ki a $\lim \frac{(2n)!}{n^{2n}}$ határértéket!

b) $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} > \frac{1}{e}$ felhasználásával számolja ki a $\lim \frac{(3n)!}{n^{3n}}$ határértéket!

Megoldás.

a) A mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenség miatt $\frac{k\cdot(2n-k)}{n^2} \leq 1$ minden $k \in \{0, \dots, 2n\}$ esetén. Ezt felhasználva

$$0 \leq \frac{(2n)!}{n^{2n}} = \frac{1\cdot(2n-1)}{n^2} \cdot \underbrace{\frac{2\cdot(2n-2)}{n^2}}_{\leq 1} \cdots \underbrace{\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n^2}}_{\leq 1} \cdot \frac{n\cdot 2n}{n^2} \leq \frac{2(2n-1)}{n^2} \to 0.$$

A rendőrelv miatt $\lim \frac{(2n)!}{n^{2n}} = 0$.

b) n helyére $3n$-et írva kapjuk, hogy $\frac{\sqrt[3n]{(3n)!}}{3n} > \frac{1}{e}$, amiből $\frac{(3n)!}{n^{3n}} > \left(\frac{3}{e}\right)^{3n} \to \infty$, így a speciális rendőrelv miatt $\lim \frac{(3n)!}{n^{3n}} = \infty$.