1. feladat (18 pont)

Adja meg az alábbi egyenlet megoldásait algebrai alakban!

$$z^4 + (4-i)z^2 - 4i = 0$$

Megoldás.

Az egyenlet z^2-ben másodfokú:

$$z^2 = \frac{i-4 \pm \sqrt{(4-i)^2 + 16i}}{2} = \frac{i-4 \pm \sqrt{(4+i)^2}}{2},$$

vagyis $z^2 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ vagy $z^2 = -4$.

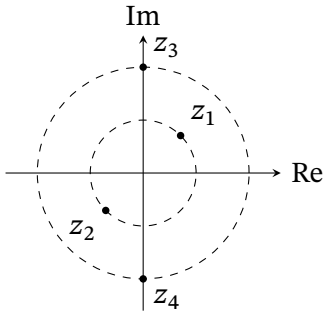
A gyökvonás képletével ($k \in \{0;1\}$) az első egyenlet megoldásai

$$z_{k+1} = \sqrt{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right),$$

azaz $z_{1,2} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. A második egyenletnél $-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$, így

$$z_{k+3} = \sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right),$$

azaz $z_{3,4} = \pm 2i$.



2. feladat (5 + 12 = 17 pont)

a) Adja meg a $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ definícióját!

b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3-3n}{n^3+n+2} = 2$!

Megoldás.

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.

b) Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$\left|\frac{2n^3-3n}{n^3+n+2} - 2\right| = \frac{5n+4}{n^3+n+2} \leq \frac{9n}{n^3} = \frac{9}{n^2} < \varepsilon,$$

ha $n > \sqrt{\frac{9}{\varepsilon}}$, így $N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{9}{\varepsilon}}\right] + 1$.

3. feladat (21 pont)

Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^3 - 4n^2 + 8}{n^4 + 3n^3 - 7n}}, \qquad b_n = \sqrt{\frac{n^3 - 4n^2 + 8}{n^4 + 3n^3 - 7n}}$$

Megoldás.

$n \geq 8$ esetén (elég nagy n esetén is jó)

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{1}{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\frac{n^3 - \frac{n^3}{2}}{n^4 + 3n^4}} \leq a_n \leq \sqrt[n]{\frac{n^3 + 8n^3}{n^4}} = \sqrt[n]{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1,$$

így a rendőrelv miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

$$b_n = \sqrt{\frac{n^3}{n^4} \cdot \frac{1 - \frac{4}{n} + \frac{8}{n^3}}{1 + \frac{3}{n} - \frac{7}{n^3}}} \to 0.$$

4. feladat (21 pont)

Konvergens-e az $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$ rekurzióval megadott sorozat? Állítását igazolja, és konvergencia esetén adja meg a határértéket!

Megoldás.

$a_2 = \sqrt{5} > a_1$, és ha $a_n < a_{n+1}$, akkor $4a_n - 3 < 4a_{n+1} - 3$, tehát $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3} < \sqrt{4a_{n+1} - 3} = a_{n+2}$, vagyis a sorozat monoton nő.

Ha a sorozat korlátos, akkor konvergens, és határértéke a sorozat legkisebb felső korlátja. A lehetséges A határérték kielégíti az $A = \sqrt{4A - 3}$ egyenletet, vagyis $A = 1$ vagy $A = 3$. Mivel $a_n \geq 2$, így a határérték csak 3 lehet.

Belátjuk, hogy $a_n < 3$: $a_1 < 3$, és ha $a_n < 3$, akkor $4a_n - 3 < 9$, így $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3} < 3$.

A sorozat tehát monoton és korlátos, így konvergens, a határértéke 3.

5. feladat (23 pont)

Adja meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját. Létezik-e határérték?

$$a_n = \left(\frac{9 - n}{4 + n}\right)^{3n}, \qquad b_n = \left(\frac{9 - n}{4 + n}\right)^{n^3}$$

Megoldás.

$$a_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\left(1 - \frac{9}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n}\right)^3 \to e^{-39}, & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\left(\dfrac{\left(1 - \frac{9}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n}\right)^3 \to -e^{-39}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

A sorozat torlódási pontjai a $\pm e^{-39}$, vagyis $\limsup a_n = e^{-39} \neq -e^{-39} = \liminf a_n$, és a sorozat nem konvergens.

Mivel $\left|\frac{9-n}{4+n}\right|^n \to e^{-13}$, ezért elég nagy n esetén

$$|b_n| = \left(\left|\frac{9-n}{4+n}\right|^n\right)^{n^2} < \left(e^{-13}+\varepsilon\right)^{n^2} \to 0,$$

ha $0 < \varepsilon < 1 - e^{-13}$. Így a sorozat egyetlen torlódási pontja a 0, és $\limsup b_n = \liminf b_n = 0 = \lim b_n$.

6. feladat (8 pont, IMSC-seknek javasolt)

Bizonyítsa be, hogy $z = re^{i\vartheta}$, $w = Re^{i\varphi}$, $0 \leq r < R$ esetén

$$\operatorname{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right) = \frac{|w|^2-|z|^2}{|w-z|^2} = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}!$$

Megoldás.

$$\frac{w+z}{w-z} = \frac{(w+z)(\overline{w}-\overline{z})}{|w-z|^2} = \frac{|w|^2-|z|^2+z\overline{w}-\overline{z}w}{|w-z|^2}.$$

Itt $\operatorname{Re}(z\overline{w}-\overline{z}w) = 0$, és $|w-z|^2 = |w|^2+|z|^2-(z\overline{w}+\overline{z}w)$, ahol $|z|^2 = r^2$, $|w|^2 = R^2$ és $z\overline{w}+\overline{z}w = 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) = 2Rr\cos(\vartheta-\varphi)$.

Szemléltetés: z az r, w az R sugarú körön van ($0 \leq r < R$), a két szám szöge ϑ, illetve φ:

