1. feladat (18 pont)

Adja meg az alábbi egyenlet megoldásait algebrai alakban!

$$z^4 + (9+i)z^2 + 9i = 0$$

2. feladat (5 + 12 = 17 pont)

a) Adja meg a $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ definícióját!

b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 - 2n}{n^3 + 2n + 1} = 3$!

3. feladat (21 pont)

Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^4 - 3n^2 + 7}{n^5 + 2n^4 - 5n^2}}, \qquad b_n = \sqrt{\frac{n^4 - 3n^2 + 7}{n^5 + 2n^4 - 5n^2}}$$

4. feladat (21 pont)

Konvergens-e az $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 8}$ rekurzióval megadott sorozat? Állítását igazolja, és konvergencia esetén adja meg a határértéket!

5. feladat (23 pont)

Adja meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját. Létezik-e határérték?

$$a_n = \left(\frac{3-n}{7+n}\right)^{5n}, \qquad b_n = \left(\frac{3-n}{7+n}\right)^{n^5}$$

6. feladat (8 pont, IMSC-seknek javasolt)

Bizonyítsa be, hogy $z = re^{i\vartheta}$, $w = Re^{i\varphi}$, $0 \le r < R$ esetén

$$\operatorname{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right) = \frac{|w|^2 - |z|^2}{|w-z|^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\vartheta - \varphi) + r^2}!$$