1. feladat (18 pont)

Írja fel algebrai alakban az $iz^5 - 8z^2 = 0$ egyenlet megoldásait.

Megoldás.

$iz^5 - 8z^2 = z^2(iz^3 - 8)$, így $z_1 = 0$ megoldás.

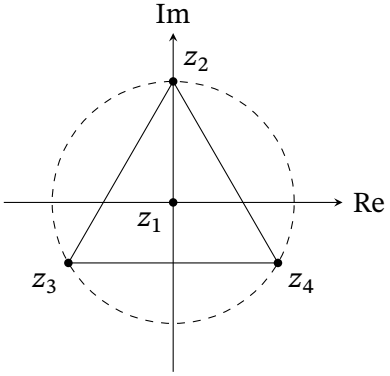
$iz^3 = 8$, ha $z^3 = -8i = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, tehát a gyökvonás képletével

$$z_{k+2} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right), \quad k \in \{0;1;2\},$$

vagyis a további megoldások

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$
$$z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i,$$
$$z_4 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i.$$

A gyökök a komplex számsíkon:



2. feladat (5 + 12 = 17 pont)

a) Adja meg a $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ definícióját!

b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2 - n - 1} = \infty$!

Megoldás.

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, ha minden $P > 0$ számhoz létezik $N(P) \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N(P)$ esetén $a_n > P$.

b) Legyen $P > 0$. Ekkor $n \geq 3$ esetén $n^2 - n - 1 > \frac{n^2}{2}$, így

$$\sqrt[3]{n^2 - n - 1} > \sqrt[3]{\frac{n^2}{2}} > P,$$

ha $n^2 > 2P^3$, így $N(P) = \max\left(3, \left[\sqrt{2P^3}\right] + 1\right)$.

3. feladat (17 pont)

Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \left(\frac{n-9}{4+n}\right)^{3n}, \qquad b_n = \left(\frac{n-9}{4+n}\right)^{n^3}.$$

Megoldás.

$$a_n = \left(\frac{\left(1-\frac{9}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}\right)^3 \to e^{-39}$$

Mivel $\left(\frac{n-9}{4+n}\right)^n \to e^{-13}$, ezért elég nagy n esetén

$$0 < b_n = \left(\left(\frac{n-9}{4+n}\right)^n\right)^{n^2} < \left(e^{-13}+\varepsilon\right)^{n^2} \to 0,$$

ha $0 < \varepsilon < 1 - e^{-13}$. Így $\lim b_n = 0$.

4. feladat (23 pont)

Konvergens-e az $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}$ rekurzióval megadott sorozat? Állítását igazolja, és konvergencia esetén adja meg a határértéket!

Megoldás.

Ha a sorozat korlátos és monoton, akkor konvergens, és határértéke a sorozat legkisebb felső vagy legnagyobb alsó korlátja. A lehetséges A határérték kielégíti az $A = 4 - \frac{3}{A}$ egyenletet, vagyis $A = 1$ vagy $A = 3$.

Belátjuk, hogy $1 < a_n < 3$: $1 < a_1 < 3$, és ha $1 < a_n < 3$, akkor $1 > \frac{1}{a_n} > \frac{1}{3}$, tehát $-3 < -\frac{3}{a_n} < -1$, így

$$1 = 4 - 3 < a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n} < 4 - 1 = 3.$$

$a_2 = \frac{5}{2} > a_1$, és ha $a_n < a_{n+1}$, akkor $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_{n+1}}$, és $-\frac{3}{a_n} < -\frac{3}{a_{n+1}}$, tehát

$$a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n} < 4 - \frac{3}{a_{n+1}} = a_{n+2},$$

vagyis a sorozat monoton nő. Mivel $a_n \geq 2$, így a határérték csak 3 lehet.

A sorozat tehát monoton és korlátos, így konvergens, a határértéke 3.

5. feladat (25 pont)

Adja meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját. Létezik-e határérték?

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^2-(-1)^n n^2+8}{n^4+(-1)^n n^4+7}}, \qquad b_n = \sqrt{\frac{n^2-(-1)^n n^2+8}{n^4+(-1)^n n^4+7}}$$

Megoldás.

Ha n páros:

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{8}{11}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^4} = \sqrt[n]{\frac{8}{11n^4}} \leq a_n = \sqrt[n]{\frac{8}{2n^4+7}} \leq \sqrt[n]{\frac{4}{n^4}} = \frac{\sqrt[n]{4}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^4} \to 1,$$

ha pedig n páratlan, akkor

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{2}{7}}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = \sqrt[n]{\frac{2n^2}{7}} \leq a_n = \sqrt[n]{\frac{2n^2+8}{7}} \leq \sqrt[n]{\frac{10n^2}{7}} = \sqrt[n]{\frac{10}{7}}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1,$$

így a sorozat egyetlen torlódási pontja 1, tehát $\limsup a_n = 1 = \liminf a_n = \lim a_n$.

Páros n esetén

$$0 \leq b_n = \sqrt{\frac{8}{2n^4+7}} \leq \frac{2}{n^2} \to 0,$$

páratlan n esetén

$$b_n = \sqrt{\frac{2n^2+8}{7}} \geq \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot n \to \infty,$$

tehát a két torlódási pont 0 és ∞, így $\limsup b_n = \infty$, $\liminf b_n = 0$, és a sorozat divergens.

6. feladat (4 + 4 = 8 pont, IMSC-seknek javasolt)

a) Igazolja, hogy ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat határértéke $A \in \mathbb{R}$, akkor

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^A.$$

b) Igazolja, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n = e^{i\alpha}.$$

A bizonyításhoz felhasználhatja, hogy $\lim_{n\to\infty} n \arctan\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \alpha$.

Megoldás.

a) Rendőrelvvel dolgozunk. Minden pozitív ε esetén elegendően nagy n-ekre teljesül, hogy $A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$, így

$$\left(1 + \frac{A-\varepsilon}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{A+\varepsilon}{n}\right)^n,$$

és limeszt véve

$$e^{A-\varepsilon} \leq \liminf\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \leq \limsup\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \leq e^{A+\varepsilon}.$$

Az $\varepsilon \to 0$ határátmenetet véve megkapjuk a bizonyítandó állítást.

b) Írjuk fel az alapot exponenciális alakban:

$$1 + \frac{i\alpha}{n} = \rho e^{i\phi}, \quad \text{ahol} \quad \rho = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{\alpha}{n}\right).$$

Ezen az alakon elvégezzük a hatványozást:

$$\left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n = \rho^n e^{in\phi} = \left(1 + \frac{\alpha^2/n}{n}\right)^{\frac{n}{2}} e^{in\arctan\left(\frac{\alpha}{n}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} e^{i\alpha},$$

hiszen $\left(1 + \frac{\alpha^2/n}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \to 1$ az a) állítás miatt, és $e^{in\arctan\left(\frac{\alpha}{n}\right)} \to e^{i\alpha}$ az exponenciális függvény folytonossága és a megadott összefüggés miatt.