1. feladat (18 pont)

Írja fel algebrai alakban az $iz^6 + 27z^3 = 0$ egyenlet megoldásait.

Megoldás.

$iz^6 + 27z^3 = z^3(iz^3 + 27)$, így $z_1 = 0$ megoldás.

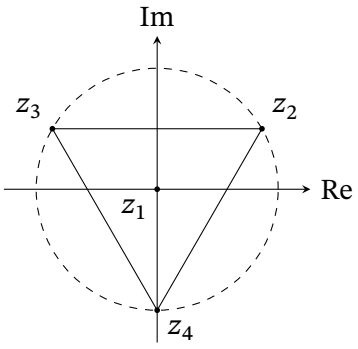
$iz^3 = -27$, ha $z^3 = 27i = 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, tehát a gyökvonás képletével

$$z_{k+2} = \sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right), \quad k \in \{0;1;2\},$$

vagyis a további megoldások

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i,$$
$$z_3 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i,$$
$$z_4 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -3i.$$

A gyökök a komplex számsíkon:



2. feladat (5 + 12 = 17 pont)

a) Adja meg a $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ definícióját!

b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{n^3 - 2n - 1} = \infty$!

Megoldás.

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, ha minden $P > 0$ számhoz létezik $N(P) \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N(P)$ esetén $a_n > P$.

b) Legyen $P > 0$. Ekkor $n \geq 3$ esetén $n^3 - 2n - 1 > \frac{n^3}{2}$, így

$$\sqrt[5]{n^3 - 2n - 1} > \sqrt[5]{\frac{n^3}{2}} > P,$$

ha $n^3 > 2P^5$, így $N(P) = \max\left(3, \left[\sqrt[3]{2P^5}\right] + 1\right)$.

3. feladat (17 pont)

Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \left(\frac{n-2}{3+n}\right)^{5n}, \qquad b_n = \left(\frac{n-2}{3+n}\right)^{n^5}.$$

Megoldás.

$$a_n = \left(\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}\right)^5 \to e^{-25}$$

Mivel $\left(\frac{n-2}{3+n}\right)^n \to e^{-5}$, ezért elég nagy n esetén

$$0 < b_n = \left(\left(\frac{n-2}{3+n}\right)^n\right)^{n^4} < \left(e^{-5}+\varepsilon\right)^{n^4} \to 0,$$

ha $0 < \varepsilon < 1 - e^{-5}$. Így $\lim b_n = 0$.

4. feladat (23 pont)

Konvergens-e az $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 7 - \frac{10}{a_n}$ rekurzióval megadott sorozat? Állítását igazolja, és konvergencia esetén adja meg a határértéket!

Megoldás.

Ha a sorozat korlátos és monoton, akkor konvergens, és határértéke a sorozat legkisebb felső vagy legnagyobb alsó korlátja. A lehetséges A határérték kielégíti az $A = 7 - \frac{10}{A}$ egyenletet, vagyis $A = 2$ vagy $A = 5$.

Belátjuk, hogy $2 < a_n < 5$: $2 < a_1 < 5$, és ha $2 < a_n < 5$, akkor $\frac{1}{2} > \frac{1}{a_n} > \frac{1}{5}$, tehát $-5 < -\frac{10}{a_n} < -2$, így

$$2 = 7 - 5 < a_{n+1} = 7 - \frac{10}{a_n} < 7 - 2 = 5.$$

$a_2 = \frac{11}{3} > a_1$, és ha $a_n < a_{n+1}$, akkor $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_{n+1}}$, és $-\frac{10}{a_n} < -\frac{10}{a_{n+1}}$, tehát

$$a_{n+1} = 7 - \frac{10}{a_n} < 7 - \frac{10}{a_{n+1}} = a_{n+2},$$

vagyis a sorozat monoton nő. Mivel $a_n \geq 3$, így a határérték csak 5 lehet.

A sorozat tehát monoton és korlátos, így konvergens, a határértéke 5.

5. feladat (25 pont)

Adja meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját. Létezik-e határérték?

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^3 - (-1)^n n^3 + 5}{n^2 + (-1)^n n^2 + 6}}, \qquad b_n = \sqrt{\frac{n^3 - (-1)^n n^3 + 5}{n^2 + (-1)^n n^2 + 6}}$$

Megoldás.

Ha n páros:

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{5}{8}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = \sqrt[n]{\frac{5}{8n^2}} \leq a_n = \sqrt[n]{\frac{5}{2n^2+6}} \leq \sqrt[n]{\frac{5}{n^2}} = \frac{\sqrt[n]{5}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \to 1,$$

ha pedig n páratlan, akkor

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{2}{6}}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = \sqrt[n]{\frac{2n^3}{6}} \leq a_n = \sqrt[n]{\frac{2n^3+5}{6}} \leq \sqrt[n]{\frac{7n^3}{6}} = \sqrt[n]{\frac{7}{6}}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \to 1,$$

így a sorozat egyetlen torlódási pontja 1, tehát $\limsup a_n = 1 = \liminf a_n = \lim a_n$.

Páros n esetén

$$0 \leq b_n = \sqrt{\frac{5}{2n^2+6}} \leq \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{n} \to 0,$$

páratlan n esetén

$$b_n = \sqrt{\frac{2n^3+5}{6}} \geq \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{3}{2}} \to \infty,$$

tehát a két torlódási pont 0 és ∞, így $\limsup b_n = \infty$, $\liminf b_n = 0$, és a sorozat divergens.

6. feladat (4 + 4 = 8 pont, IMSC-seknek javasolt)

a) Igazolja, hogy ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat határértéke $A \in \mathbb{R}$, akkor

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^A.$$

b) Igazolja, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n = e^{i\alpha}.$$

A bizonyításhoz felhasználhatja, hogy $\lim_{n\to\infty} n \arctan\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \alpha$.

Megoldás.

a) Rendőrelvvel dolgozunk. Minden pozitív ε esetén elegendően nagy n-ekre teljesül, hogy $A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$, így

$$\left(1 + \frac{A-\varepsilon}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{A+\varepsilon}{n}\right)^n,$$

és limeszt véve

$$e^{A-\varepsilon} \leq \liminf\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \leq \limsup\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \leq e^{A+\varepsilon}.$$

Az $\varepsilon \to 0$ határátmenetet véve megkapjuk a bizonyítandó állítást.

b) Írjuk fel az alapot exponenciális alakban:

$$1 + \frac{i\alpha}{n} = \rho e^{i\phi}, \quad \text{ahol} \quad \rho = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{\alpha}{n}\right).$$

Ezen az alakon elvégezzük a hatványozást:

$$\left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n = \rho^n e^{in\phi} = \left(1 + \frac{\alpha^2/n}{n}\right)^{\frac{n}{2}} e^{in\arctan\left(\frac{\alpha}{n}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} e^{i\alpha},$$

hiszen $\left(1 + \frac{\alpha^2/n}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \to 1$ az a) állítás miatt, és $e^{in\arctan\left(\frac{\alpha}{n}\right)} \to e^{i\alpha}$ az exponenciális függvény folytonossága és a megadott összefüggés miatt.