1. feladat (18 pont)

Írja fel algebrai alakban az $iz^6 + 27z^3 = 0$ egyenlet megoldásait.

2. feladat (5 + 12 = 17 pont)

a) Adja meg a $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ definícióját!

b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{n^3 - 2n - 1} = \infty$!

3. feladat (17 pont)

Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \left(\frac{n-2}{3+n}\right)^{5n}, \qquad b_n = \left(\frac{n-2}{3+n}\right)^{n^5}.$$

4. feladat (23 pont)

Konvergens-e az $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 7 - \frac{10}{a_n}$ rekurzióval megadott sorozat? Állítását igazolja, és konvergencia esetén adja meg a határértéket!

5. feladat (25 pont)

Adja meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját. Létezik-e határérték?

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^3 - (-1)^n n^3 + 5}{n^2 + (-1)^n n^2 + 6}}, \qquad b_n = \sqrt{\frac{n^3 - (-1)^n n^3 + 5}{n^2 + (-1)^n n^2 + 6}}$$

6. feladat (4 + 4 = 8 pont, IMSC-seknek javasolt)

a) Igazolja, hogy ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat határértéke $A \in \mathbb{R}$, akkor

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^A.$$

b) Igazolja, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n = e^{i\alpha}.$$

A bizonyításhoz felhasználhatja, hogy $\lim_{n\to\infty} n \arctan\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \alpha$.