1. feladat (24 pont)

a) Adja meg

$$z = \frac{1-i}{(3+4i)-(2-i)}, \qquad \text{és} \qquad w = (2+2i)\cdot\left(\overline{2(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)}\right)$$

valós és képzetes részét!

b) Adja meg a $z^2 + 2z + 3i(z+1)$ polinom komplex gyökeit!

Megoldás.

a)

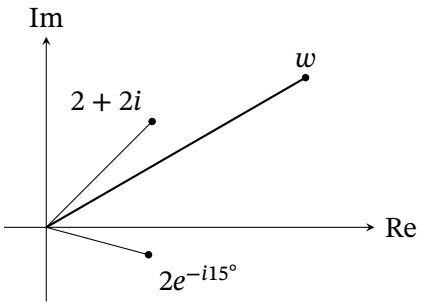
$$z = \frac{1-i}{(3+4i)-(2-i)} = \frac{1-i}{1+5i} = \frac{(1-i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)} = \frac{-4-6i}{26} = -\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i,$$

tehát $\operatorname{Re} z = -\frac{2}{13}$ és $\operatorname{Im} z = -\frac{3}{13}$.

Trigonometrikus alakban számolva $2+2i = 2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$ és $\overline{2(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)} = 2(\cos(-15^\circ) + i\sin(-15^\circ))$, így

$$w = 4\sqrt{2}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}i,$$

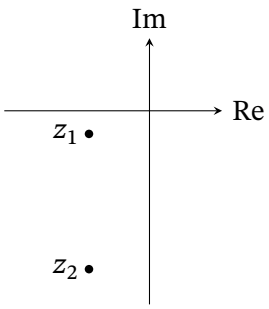
tehát $\operatorname{Re} w = 2\sqrt{6}$ és $\operatorname{Im} w = 2\sqrt{2}$. A szorzásnál a hosszak összeszorzódnak, a szögek összeadódnak ($45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$):



b) $z^2 + 2z + 3i(z+1) = z^2 + (2+3i)z + 3i$, így a gyökök

$$z_{1,2} = \frac{-(2+3i) \pm \sqrt{(2+3i)^2 - 12i}}{2} = \frac{-2-3i \pm \sqrt{-5}}{2} = \frac{-2-3i \pm \sqrt{5}i}{2},$$

azaz $z_1 = -1 + \frac{\sqrt{5}-3}{2}i$ és $z_2 = -1 - \frac{\sqrt{5}+3}{2}i$. A gyökök a komplex számsíkon:



2. feladat (26 pont)

Határozza meg az

a) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$;

b) $b_n = \dfrac{(-4)^{2n-1} + (-3)^{3n+1}}{(-5)^{2n}}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás.

a)

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1} \to \frac{1}{2}$$

b)

$$b_n = \frac{-\frac{1}{4}\cdot 16^n - 3\cdot(-27)^n}{25^n} = -\frac{1}{4}\left(\frac{16}{25}\right)^n - 3(-1)^n\left(\frac{27}{25}\right)^n$$

Az első tag 0-hoz tart, a második abszolút értéke ∞-hez, és előjele váltakozik: páros n-re $b_n \to -\infty$, páratlan n-re $b_n \to \infty$. A sorozatnak tehát két torlódási pontja van ($\pm\infty$), így nincs határértéke.

3. feladat (26 pont)

Határozza meg a

a) $c_n = \dfrac{n^5\cdot\sqrt{n} + 3n^3 + 100}{3n^6\cdot\sqrt[3]{n} + 100n^2}$;

b) $d_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^5\cdot\sqrt{n} + 3n^3 + 100}{3n^4\cdot\sqrt[3]{n} + 100n^2}}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás.

a) A számláló és a nevező legmagasabb fokú tagjával ($n^{11/2}$, illetve $n^{19/3}$) egyszerűsítve:

$$c_n = \frac{n^{11/2}}{n^{19/3}}\cdot\frac{1+\frac{3}{n^{5/2}}+\frac{100}{n^{11/2}}}{3+\frac{100}{n^{13/3}}} = \frac{1}{n^{5/6}}\cdot\frac{1+\frac{3}{n^{5/2}}+\frac{100}{n^{11/2}}}{3+\frac{100}{n^{13/3}}} \to 0\cdot\frac{1}{3} = 0$$

b) Minden $n \geq 1$ esetén

$$\frac{n^{11/2}}{103n^{13/3}} \leq \frac{n^5\cdot\sqrt{n} + 3n^3 + 100}{3n^4\cdot\sqrt[3]{n} + 100n^2} \leq \frac{104n^{11/2}}{3n^{13/3}},$$

így

$$1 \leftarrow \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{7/6}}{\sqrt[n]{103}} \leq d_n \leq \sqrt[n]{\frac{104}{3}}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{7/6} \to 1,$$

tehát a rendőrelv miatt $d_n \to 1$.

4. feladat (24 pont)

Határozza meg az

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x^2-2x+1)(x^4+3)}}{x^3-x}$$

függvény alábbi határértékeit, ha léteznek!

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$;

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$;

Megoldás.

Mivel $x^2-2x+1=(x-1)^2$ és $x^3-x=x(x-1)(x+1)$, ezért

$$f(x) = \frac{|x-1|\sqrt{x^4+3}}{x(x-1)(x+1)}.$$

a) $x<1$ esetén $|x-1|=1-x$, így

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}}{1-\frac{1}{x^2}} = -1\cdot 1 = -1.$$

b)

$$\lim_{x\to 1\pm 0} f(x) = \lim_{x\to 1\pm 0} \underbrace{\frac{|x-1|}{x-1}}_{=\pm 1}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{x^4+3}}{x(x+1)}}_{\to 1} = \pm 1,$$

a bal és a jobb oldali határérték különbözik, így $\lim_{x\to 1} f(x)$ nem létezik.

c) f folytonos a 2 pontban, így $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = \frac{\sqrt{19}}{6}$.

5. feladat (8 pont, IMSC-seknek javasolt)

Legyen $x_0=-1$ és $x_n = -4\sqrt[3]{x_{n-1}}$ minden $n\in\mathbb{N}^+$-re! Adja meg a sorozat torlódási pontjait!

Megoldás.

A köbgyökvonás megtartja az előjelet, a -4-gyel szorzás megfordítja, így x_n előjele lépésenként váltakozik: $x_0=-1<0$, $x_1=4>0$, és így tovább. Az abszolút értékre $|x_n| = 4\sqrt[3]{|x_{n-1}|}$.

Legyen $y_n = \log_4|x_n|$. Ekkor $y_0=0$ és $y_n = 1+\frac{1}{3}y_{n-1}$, azaz $y_n-\frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(y_{n-1}-\frac{3}{2}\right)$, így

$$y_n = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\to\frac{3}{2}, \qquad |x_n| = 4^{y_n}\to 4^{\frac{3}{2}} = 8.$$

Páratlan n-re $x_n=|x_n|\to 8$, páros n-re $x_n=-|x_n|\to -8$.

A sorozat torlódási pontjai tehát: $\{-8, 8\}$.