1. feladat (24 pont)

a) Adja meg

$$z = \frac{(3+4i)-(2-i)}{1-i}, \qquad \text{és} \qquad w = \left(\overline{2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)}\right) \cdot (3-3i)$$

valós és képzetes részét!

b) Adja meg a $z^2 + 2z + 3i(z+1)$ polinom komplex gyökeit!

Megoldás.

a)

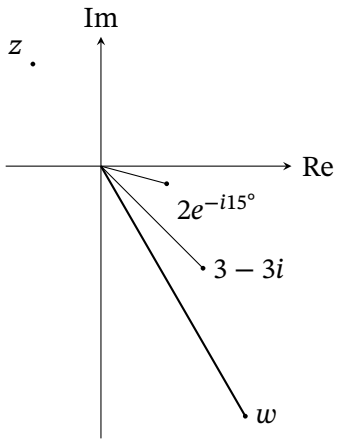
$$z = \frac{(3+4i)-(2-i)}{1-i} = \frac{1+5i}{1-i} = \frac{(1+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-4+6i}{2} = -2+3i,$$

tehát $\operatorname{Re} z = -2$ és $\operatorname{Im} z = 3$.

Trigonometrikus alakban számolva $\overline{2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)} = 2(\cos(-15^\circ) + i \sin(-15^\circ))$ és $3 - 3i = 3\sqrt{2}(\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ))$, így

$$w = 6\sqrt{2}(\cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ)) = 6\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{6}i,$$

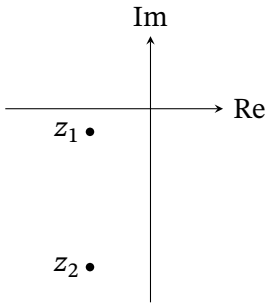
tehát $\operatorname{Re} w = 3\sqrt{2}$ és $\operatorname{Im} w = -3\sqrt{6}$. A szorzásnál a hosszak összeszorzódnak, a szögek összeadódnak ($-15^\circ - 45^\circ = -60^\circ$):



b) $z^2 + 2z + 3i(z+1) = z^2 + (2+3i)z + 3i$, így a gyökök

$$z_{1,2} = \frac{-(2+3i) \pm \sqrt{(2+3i)^2 - 12i}}{2} = \frac{-2-3i \pm \sqrt{-5}}{2} = \frac{-2-3i \pm \sqrt{5}i}{2},$$

azaz $z_1 = -1 + \frac{\sqrt{5}-3}{2}i$ és $z_2 = -1 - \frac{\sqrt{5}+3}{2}i$. A gyökök a komplex számsíkon:



2. feladat (26 pont)

Határozza meg az

a) $a_n = \dfrac{n^5 \cdot \sqrt{n} + 3n^3 - 100}{3n^4 \cdot \sqrt[3]{n} + 100n^2}$;

b) $b_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^5 \cdot \sqrt{n} + 3n^3 - 100}{3n^4 \cdot \sqrt[3]{n} + 100n^2}}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás.

a) A számláló és a nevező legmagasabb fokú tagjával ($n^{11/2}$, illetve $n^{13/3}$) egyszerűsítve:

$$a_n = n^{7/6} \cdot \frac{1 + \frac{3}{n^{5/2}} - \frac{100}{n^{11/2}}}{3 + \frac{100}{n^{7/3}}} \to \infty,$$

mert $n^{7/6} \to \infty$, a második tényező pedig $\frac{1}{3}$-hoz tart.

b) $n \geq 3$ esetén $n^{11/2} \geq 200$, így

$$\frac{n^{11/2}}{2 \cdot 103 n^{13/3}} \leq \frac{n^5 \cdot \sqrt{n} + 3n^3 - 100}{3n^4 \cdot \sqrt[3]{n} + 100n^2} \leq \frac{4n^{11/2}}{3n^{13/3}},$$

tehát

$$1 \leftarrow \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{7/6}}{\sqrt[n]{206}} \leq b_n \leq \sqrt[n]{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[n]{n}\right)^{7/6} \to 1,$$

így a rendőrelv miatt $b_n \to 1$.

3. feladat (26 pont)

Határozza meg a

a) $c_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$;

b) $d_n = \dfrac{(-2)^{5n+1} + (-3)^{3n-1}}{(-4)^{2n}}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás.

a)

$$c_n = \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1} \to \frac{1}{2}$$

b)

$$d_n = \frac{-2\cdot(-32)^n - \frac{1}{3}(-27)^n}{16^n} = (-1)^{n+1}\left(2\cdot 2^n + \frac{1}{3}\left(\frac{27}{16}\right)^n\right)$$

A zárójelben álló kifejezés ∞-hez tart, az előjel pedig váltakozik: páros n-re $d_n \to -\infty$, páratlan n-re $d_n \to \infty$. A sorozatnak tehát két torlódási pontja van ($\pm\infty$), így nincs határértéke.

4. feladat (24 pont)

Határozza meg az

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x^2-2x+1)(x^4+3)}}{x^3-x}$$

függvény alábbi határértékeit, ha léteznek!

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$;

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$;

Megoldás.

Mivel $x^2-2x+1=(x-1)^2$ és $x^3-x=x(x-1)(x+1)$, ezért

$$f(x) = \frac{|x-1|\sqrt{x^4+3}}{x(x-1)(x+1)}.$$

a) $x<1$ esetén $|x-1|=1-x$, így

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}}{1-\frac{1}{x^2}} = -1\cdot 1 = -1.$$

b)

$$\lim_{x\to 1\pm 0} f(x) = \lim_{x\to 1\pm 0} \underbrace{\frac{|x-1|}{x-1}}_{=\pm 1}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{x^4+3}}{x(x+1)}}_{\to 1} = \pm 1,$$

a bal és a jobb oldali határérték különbözik, így $\lim_{x\to 1} f(x)$ nem létezik.

c) f folytonos a 2 pontban, így $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = \frac{\sqrt{19}}{6}$.

5. feladat (8 pont, IMSC-seknek javasolt)

Legyen $x_0=-1$ és $x_n = -4\sqrt[3]{x_{n-1}}$ minden $n\in\mathbb{N}^+$-re! Adja meg a sorozat torlódási pontjait!

Megoldás.

A köbgyökvonás megtartja az előjelet, a -4-gyel szorzás megfordítja, így x_n előjele lépésenként váltakozik: $x_0 = -1 < 0$, $x_1 = 4 > 0$, és így tovább. Az abszolút értékre $|x_n| = 4\sqrt[3]{|x_{n-1}|}$.

Legyen $y_n = \log_4 |x_n|$. Ekkor $y_0 = 0$ és $y_n = 1 + \frac{1}{3} y_{n-1}$, azaz $y_n - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(y_{n-1} - \frac{3}{2}\right)$, így

$$y_n = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \to \frac{3}{2}, \qquad |x_n| = 4^{y_n} \to 4^{\frac{3}{2}} = 8.$$

Páratlan n-re $x_n = |x_n| \to 8$, páros n-re $x_n = -|x_n| \to -8$.

A sorozat torlódási pontjai tehát: $\{-8, 8\}$.