1. feladat (10 + 4 + 10 = 24 pont)

a) $\dfrac{(6+3i)\cdot(2-i)}{(2+i)^2} = ?$ (Az eredményt algebrai alakban adja meg!)

b) $\dfrac{(6+3i)+(2-i)}{(4+i)\cdot 2} = ?$ (Az eredményt algebrai alakban adja meg!)

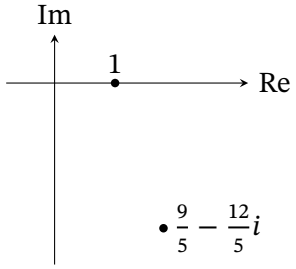
c) Adja meg a $z^8 = 8z^2$ egyenlet komplex megoldásait! Adja meg egy nem valós megoldás valós és képzetes részét!

Megoldás.

a)
$$\frac{(6+3i)\cdot(2-i)}{(2+i)^2} = \frac{3\cdot(2-i)^2}{(2+i)\cdot(2-i)} = \frac{3}{5}\left(4-4i+i^2\right) = \frac{9}{5} - \frac{12}{5}i$$

b)
$$\frac{(6+3i)+(2-i)}{(4+i)\cdot 2} = \frac{8+2i}{8+2i} = 1$$

Az a) és b) rész eredménye a komplex számsíkon:



c) $z^8 - 8z^2 = z^2(z^6 - 8)$ gyökei

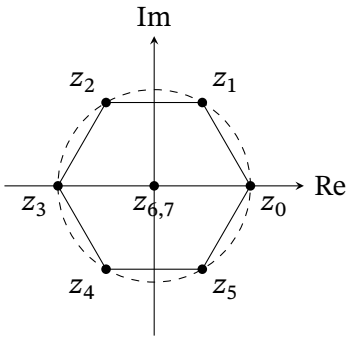
$$z_k = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}\left(\cos(k\cdot 60°) + i\sin(k\cdot 60°)\right), \quad k = 0,1,2,3,4,5,$$

és $z_{6,7} = 0$.

A nem valós gyökök valós és képzetes része (elég egyet megadni):

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} z_1 = \sqrt{2}\cos 60° = \frac{\sqrt{2}}{2}, && \operatorname{Im} z_1 = \sqrt{2}\sin 60° = \frac{\sqrt{6}}{2},\\
&\operatorname{Re} z_2 = \sqrt{2}\cos 120° = -\frac{\sqrt{2}}{2}, && \operatorname{Im} z_2 = \sqrt{2}\sin 120° = \frac{\sqrt{6}}{2},\\
&\operatorname{Re} z_4 = \sqrt{2}\cos 240° = -\frac{\sqrt{2}}{2}, && \operatorname{Im} z_4 = \sqrt{2}\sin 240° = -\frac{\sqrt{6}}{2},\\
&\operatorname{Re} z_5 = \sqrt{2}\cos 300° = \frac{\sqrt{2}}{2}, && \operatorname{Im} z_5 = \sqrt{2}\sin 300° = -\frac{\sqrt{6}}{2}.
\end{aligned}$$

A gyökök a komplex számsíkon (a nem nulla gyökök egy $\sqrt{2}$ sugarú körbe írt szabályos hatszög csúcsai):



2. feladat (11 + 15 + 13 = 39 pont)

Határozza meg az

a) $a_n = \dfrac{n + \sqrt{n} + \sqrt[n]{n}}{4n + \cos(4n)}$;

b) $b_n = \left(\dfrac{n^2 + 2n}{n^2 + 2}\right)^{n^2}$;

c) $c_n = \sqrt[n]{3^n + 5^{(-1)^n \cdot n}}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás.

a)
$$a_n = \frac{1 + \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\to 0} + \overbrace{\sqrt[n]{n}}^{\to 0}}{4 + \underbrace{\cos(4n)}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} \to \frac{1}{4}$$

b)
$$b_n = \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}} \geq \frac{\left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right)^n}{e^2} \geq \frac{3^n}{e^2} \to \infty,$$
így a speciális rendőrelv miatt $b_n \to \infty$.

c) Ha n páros, akkor $5 = \sqrt[n]{5^n} \leq c_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{5^n + 5^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 5 \to 5$, így ezekre $c_n \to 5$.

Ha n páratlan, akkor $3 = \sqrt[n]{3^n} \leq c_n = \sqrt[n]{3^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 3 \to 3$, így ezekre $c_n \to 3$.

c_n-nek két torlódási pontja van, így nincs határértéke.

3. feladat (13 pont)

Legyen $d_1 = 2$ és $d_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{d_n}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Mutassa meg, hogy d_n monoton növő és korlátos. Adja meg d_n határértékét, ha létezik!

Megoldás.

Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $1 \leq d_n \leq 4$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Mivel $d_1 = 2$, ezért $n = 1$-re az állítás teljesül. Ha valamilyen n-re teljesül, azaz $1 \leq d_n \leq 4$, akkor $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{d_n} \leq 1$, így $1 \leq \frac{4}{d_n} \leq 4$, és ezért $1 \leq 5 - \frac{4}{d_n} = d_{n+1} \leq 4$.

Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy d_n monoton növő, azaz $d_n \leq d_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Mivel $d_2 = 3$, ezért $n = 1$-re az állítás teljesül. Ha valamilyen n-re teljesül, azaz $d_n \leq d_{n+1}$, akkor mivel d_n pozitív, ezért $\frac{1}{d_n} \geq \frac{1}{d_{n+1}}$, és így

$$d_{n+1} = 5 - \frac{4}{d_n} \leq 5 - \frac{4}{d_{n+1}} = d_{n+2},$$

vagyis $n+1$-re is teljesül az egyenlőtlenség.

Mivel a sorozat korlátos és monoton, ezért konvergens, határértéke a rekurzió valamelyik fixpontja. Az $A = 5 - \frac{4}{A}$ egyenlet megoldásai $A = 1$ és $A = 4$. Mivel d_n monoton növő és $d_2 = 3$, a határérték nem lehet 1. Tehát $\lim d_n = 4$.

4. feladat (5 + 8 + 8 + 3 = 24 pont)

Határozza meg az

$$f(x) = \frac{\sin(4 - x^2)}{x^2 + 2x}$$

függvény alábbi határértékeit, ha léteznek!

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$;

d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$;

Megoldás.

a)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\sin(4 - x^2)}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2 + 2x}}_{\to 0} = 0$$

b)

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \underbrace{\frac{\sin(4 - x^2)}{4 - x^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{(2 + x)(2 - x)}{(x + 2)x}}_{\to \frac{4}{-2}} = -2$$

c)

$$\lim_{x \to 0 \pm 0} f(x) = \lim_{x \to 0 \pm 0} \frac{\sin \overbrace{(4 - x^2)}^{\to 4}}{\underbrace{x^2 + 2x}_{\to 0 \pm 0}} = \mp\infty,$$

mivel $\sin 4 < 0$; így $\lim_{x \to 0} f(x)$ nem létezik.

d)

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{\sin(0)}{8} = 0$$

5. feladat (8 pont, IMSC-seknek javasolt)

Adja meg az

$$x_n = \sqrt[n^2]{(2n+1)! - (2n)!}$$

sorozat határértékét, ha létezik!

Megoldás.

Mivel $(2n+1)! - (2n)! = 2n \cdot (2n)!$ és $(2n)! \leq (2n)^{2n}$, ezért

$$1 \leq x_n = \sqrt[n^2]{2n \cdot (2n)!} \leq \sqrt[n^2]{(2n)^{2n+1}} \leq \sqrt[n^2]{(2n)^{3n}} = \left(\sqrt[n]{2n}\right)^3 \to 1.$$

A rendőrelv miatt $x_n \to 1$.