1. feladat (10 + 4 + 10 = 24 pont)

a) $\dfrac{(3+i)\cdot(2+i)}{(6+2i)\cdot(2-i)} = ?$ (Az eredményt algebrai alakban adja meg!)

b) $\dfrac{2\cdot(3+i)+(1-5i)}{(7-3i)} = ?$ (Az eredményt algebrai alakban adja meg!)

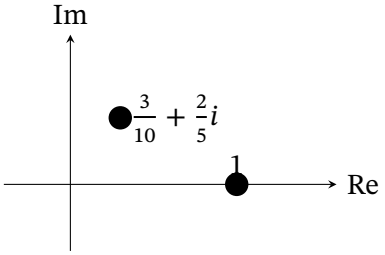
c) Adja meg a $z^8 = 8z^2$ egyenlet komplex megoldásait! Adja meg egy nem valós megoldás valós és képzetes részét!

Megoldás.

a)
$$\frac{(3+i)\cdot(2+i)}{(6+2i)\cdot(2-i)} = \frac{(2+i)^2}{2\cdot(2-i)\cdot(2+i)} = \frac{4+4i-1}{10} = \frac{3}{10}+\frac{2}{5}i$$

b)
$$\frac{2\cdot(3+i)+(1-5i)}{(7-3i)} = \frac{7-3i}{7-3i} = 1$$

Az a) és b) rész eredménye a komplex számsíkon:



c) $z^8 - 8z^2 = z^2(z^6-8)$ gyökei

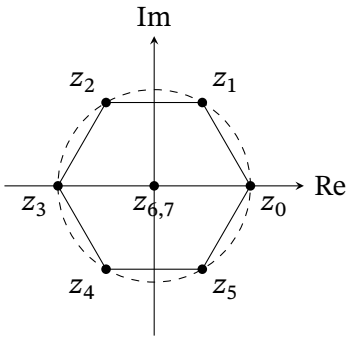
$$z_k = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}\,(\cos(k\cdot 60°) + i\sin(k\cdot 60°)), \quad k = 0,1,2,3,4,5,$$

és $z_{6,7} = 0$.

A nem valós gyökök valós és képzetes része (elég egyet megadni):

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} z_1 &= \sqrt{2}\cos 60° = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \operatorname{Im} z_1 &= \sqrt{2}\sin 60° = \frac{\sqrt{6}}{2},\\
\operatorname{Re} z_2 &= \sqrt{2}\cos 120° = -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \operatorname{Im} z_2 &= \sqrt{2}\sin 120° = \frac{\sqrt{6}}{2},\\
\operatorname{Re} z_4 &= \sqrt{2}\cos 240° = -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \operatorname{Im} z_4 &= \sqrt{2}\sin 240° = -\frac{\sqrt{6}}{2},\\
\operatorname{Re} z_5 &= \sqrt{2}\cos 300° = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \operatorname{Im} z_5 &= \sqrt{2}\sin 300° = -\frac{\sqrt{6}}{2}.
\end{aligned}$$

A gyökök a komplex számsíkon (a nem nulla gyökök egy $\sqrt{2}$ sugarú körbe írt szabályos hatszög csúcsai):



2. feladat (15 + 11 + 13 = 39 pont)

Határozza meg az

a) $a_n = \left(\frac{n^2+3n}{n^2+3}\right)^{n^2}$;

b) $b_n = \frac{n+\sqrt{n}+\sqrt[n]{n}}{3n+\sin(3n)}$;

c) $c_n = \sqrt[n]{2^n + 3^{(-1)^n \cdot n}}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás.

a)

$$a_n = \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}} \geq \frac{\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^n\right)^n}{e^3} \geq \frac{4^n}{e^3} \to \infty,$$

így a speciális rendőrelv miatt $a_n \to \infty$.

b)

$$b_n = \frac{1 + \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}^{\to 0}}{3 + \underbrace{\sin(3n)}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} \to \frac{1}{3}$$

c) Ha n páros, akkor $3 = \sqrt[n]{3^n} \leq c_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 3 \to 3$, így ezekre $c_n \to 3$.

Ha n páratlan, akkor $2 = \sqrt[n]{2^n} \leq c_n = \sqrt[n]{2^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 2^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 2 \to 2$, így ezekre $c_n \to 2$.

c_n-nek két torlódási pontja van, így nincs határértéke.

3. feladat (13 pont)

Legyen $d_1 = 2$ és $d_{n+1} = 7 - \frac{6}{d_n}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Mutassa meg, hogy d_n monoton növő és korlátos. Adja meg d_n határértékét, ha létezik!

Megoldás.

Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $1 \leq d_n \leq 6$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Mivel $d_1 = 2$, ezért $n = 1$-re az állítás teljesül. Ha valamilyen n-re teljesül, azaz $1 \leq d_n \leq 6$, akkor $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{d_n} \leq 1$, így $1 \leq \frac{6}{d_n} \leq 6$, és ezért $1 \leq 7 - \frac{6}{d_n} = d_{n+1} \leq 6$.

Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy d_n monoton növő, azaz $d_n \leq d_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Mivel $d_2 = 4$, ezért $n = 1$-re az állítás teljesül. Ha valamilyen n-re teljesül, azaz $d_n \leq d_{n+1}$, akkor mivel d_n pozitív, ezért $\frac{1}{d_n} \geq \frac{1}{d_{n+1}}$, és így

$$d_{n+1} = 7 - \frac{6}{d_n} \leq 7 - \frac{6}{d_{n+1}} = d_{n+2},$$

vagyis $n+1$-re is teljesül az egyenlőtlenség.

Mivel a sorozat korlátos és monoton, ezért konvergens, határértéke a rekurzió valamelyik fixpontja. Az $A = 7 - \frac{6}{A}$ egyenlet megoldásai $A = 1$ és $A = 6$. Mivel d_n monoton növő és $d_2 = 4$, a határérték nem lehet 1. Tehát $\lim d_n = 6$.

4. feladat (5 + 3 + 8 + 8 = 24 pont)

Határozza meg az

$$f(x) = \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 2x}$$

függvény alábbi határértékeit, ha léteznek!

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$;

d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$;

Megoldás.

a)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\sin(x^2 - 4)}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2 - 2x}}_{\to 0} = 0$$

b)

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \frac{\sin(0)}{8} = 0$$

c)

$$\lim_{x \to 0 \pm 0} f(x) = \lim_{x \to 0 \pm 0} \frac{\sin \overbrace{(x^2 - 4)}^{\to -4}}{\underbrace{x^2 - 2x}_{\to 0 \mp 0}} = \mp\infty,$$

mivel $\sin(-4) > 0$; így $\lim_{x \to 0} f(x)$ nem létezik.

d)

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \underbrace{\frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)x}}_{\to \frac{4}{2}} = 2$$

5. feladat (8 pont, IMSC-seknek javasolt)

Adja meg az

$$x_n = \sqrt[n^2]{(2n+1)! - (2n)!}$$

sorozat határértékét, ha létezik!

Megoldás.

Mivel $(2n+1)! - (2n)! = 2n \cdot (2n)!$ és $(2n)! \leq (2n)^{2n}$, ezért

$$1 \leq x_n = \sqrt[n^2]{2n \cdot (2n)!} \leq \sqrt[n^2]{(2n)^{2n+1}} \leq \sqrt[n^2]{(2n)^{3n}} = \left(\sqrt[n]{2n}\right)^3 \to 1.$$

A rendőrelv miatt $x_n \to 1$.