1. feladat (16 + 8 = 24 pont)

a) Adja meg

$$z = \frac{(3-4i)-(2+i)}{1-i}, \qquad \text{és} \qquad w = \left(1+\sqrt{3}i\right)^{2022}$$

valós és képzetes részét!

b) Adja meg a $z^3 + iz^2 + 2z$ polinom komplex gyökeit!

Megoldás.

a)

$$z = \frac{1-5i}{1-i} = \frac{(1-5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-5i+i-5i^2}{1-i^2} = \frac{6-4i}{2} = 3-2i,$$

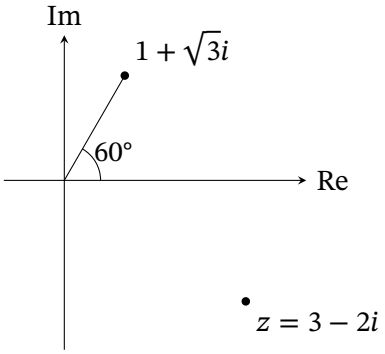
tehát $\operatorname{Re} z = 3$ és $\operatorname{Im} z = -2$.

$|1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$, és mivel $\operatorname{Im}(1+\sqrt{3}i) = \sqrt{3} > 0$, ezért $\arg(1+\sqrt{3}i) = \arccos \frac{\operatorname{Re}(1+\sqrt{3}i)}{|1+\sqrt{3}i|} = \arccos \frac{1}{2} = 60°$. A Moivre-képlettel

$$w = 2^{2022}\left(\cos(2022 \cdot 60°) + i \sin(2022 \cdot 60°)\right) = 2^{2022}\left(\cos 0° + i \sin 0°\right) = 2^{2022},$$

mert $2022 \cdot 60° = 337 \cdot 360°$ (a 2022 osztható 6-tal). Tehát $\operatorname{Re} w = 2^{2022}$ és $\operatorname{Im} w = 0$.

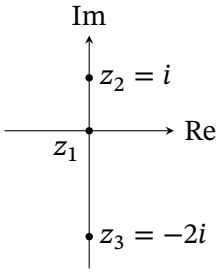
A z és az $1+\sqrt{3}i$ szám a komplex számsíkon (w a hossza miatt nem fér az ábrára; a pozitív valós tengelyen van):



b) $z^3 + iz^2 + 2z = z\left(z^2 + iz + 2\right)$ gyökei $z_1 = 0$ és

$$z_{2,3} = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{-9}}{2} = \frac{-i \pm 3i}{2},$$

tehát $z_2 = i$ és $z_3 = -2i$. A gyökök a komplex számsíkon:



2. feladat (13 + 13 = 26 pont)

Határozza meg az

a) $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$;

b) $b_n = \sqrt[n]{n^2+n} - \sqrt[n]{n^2-n}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás.

a)

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}\right)\left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} \to 1$$

b) Ha $n \geq 2$, akkor $n^2 - n \geq 1$ és $n^2 + n \leq 2n^2$, így

$$0 \leq b_n \leq \sqrt[n]{2n^2} - 1 = \sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 - 1 \to 1 - 1 = 0,$$

tehát a rendőrelv miatt $b_n \to 0$.

3. feladat (13 + 13 = 26 pont)

Határozza meg a

a) $c_n = \dfrac{(-1)^n(-n)^5 + 7n^4 + 10n^2 + 6}{3n^6 + 9n^3 - 8n}$;

b) $d_n = \left(\dfrac{n-3}{n+3}\right)^{2n+1}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás.

a) Mivel $(-1)^n(-n)^5 = -(-1)^n n^5$, a számlálót és a nevezőt n^6-nal osztva:

$$c_n = \frac{-\frac{(-1)^n}{n} + \frac{7}{n^2} + \frac{10}{n^4} + \frac{6}{n^6}}{3 + \frac{9}{n^3} - \frac{8}{n^5}} \to 0$$

b)

$$d_n = \left(\frac{n-3}{n+3}\right)^{2n+1} = \left(\frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}\right)^2 \cdot \frac{1-\frac{3}{n}}{1+\frac{3}{n}} \to \left(\frac{e^{-3}}{e^3}\right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{e^{12}}$$

4. feladat (7 + 13 + 4 = 24 pont)

Határozza meg az

$$f(x) = \frac{x^{2022} - x^{2021}}{|x^{2022} + x^{2021}|}$$

függvény alábbi határértékeit, ha léteznek!

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$;

Megoldás.

Mivel $x^{2022}-x^{2021}=x^{2021}(x-1)$ és $x^{2022}+x^{2021}=x^{2021}(x+1)$:

a)
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{|x|}\right)^{2022}\cdot\frac{1-\frac{1}{x}}{\left|1+\frac{1}{x}\right|}=1$$

b)
$$\lim_{x\to 0\pm 0} f(x)=\lim_{x\to 0\pm 0}\left(\frac{x}{|x|}\right)^{2021}\cdot\frac{x-1}{|x+1|}=\pm 1\cdot(-1)=\mp 1,$$
a két oldali határérték különbözik, így $\lim_{x\to 0} f(x)$ nem létezik.

c) f folytonos az 1 pontban, így $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=\frac{0}{2}=0$.