1. feladat (5 + 9 = 14 pont)

a) Adja meg $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ definícióját! (x_0 az f értelmezési tartományának torlódási pontja.)

b) A definíció alapján lássa be, hogy $\lim_{x\to 1}\sqrt{4x+5} = 3$.

Megoldás.

a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$.

b) Legyen $\varepsilon > 0$.

$$\left|\sqrt{4x+5} - 3\right| = \left|\frac{4x+5-9}{\sqrt{4x+5}+3}\right| < \frac{4|x-1|}{3} < \varepsilon \Longleftarrow |x-1| < \frac{3\varepsilon}{4},$$

vagyis $\delta(\varepsilon) = \dfrac{3\varepsilon}{4}$.

2. feladat (16 pont)

Adja meg a $z^4 - (1-2i)z^2 - i - 1 = 0$ egyenlet összes megoldását exponenciális alakban!

Megoldás.

Az egyenlet z^2-ben másodfokú:

$$z^2 = \frac{1-2i \pm \sqrt{(1-2i)^2 + 4i + 4}}{2} = \frac{1-2i \pm \sqrt{1}}{2},$$

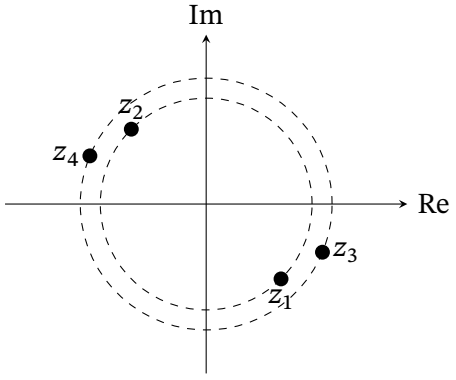
vagyis $z^2 = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ vagy $z^2 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. A gyökvonás képletével ($k \in \{0;1\}$):

$$\sqrt{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}, \qquad \sqrt{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}} = \sqrt[4]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+k\pi\right)},$$

vagyis

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_3 = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}, \quad z_4 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}.$$

A gyökök a komplex számsíkon:



3. feladat (10 + 10 + 10 = 30 pont)

Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

a) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^3+3n}{3n^2+5}}$,

b) $b_n = \sqrt{4n^2+3n-4} - 2n$,

c) $c_n = \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$.

Megoldás.

a) Becsüljük a gyökjel alatti kifejezést:

$$\frac{n}{8} = \frac{n^3}{3n^2+5n^2} \le \frac{n^3+3n}{3n^2+5} \le \frac{n^3+3n^3}{3n^2} = \frac{4n}{3}.$$

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\frac{1}{8}} \le a_n \le \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\frac{4}{3}} \to 1.$$

Így a rendőrelv miatt $a_n \to 1$.

b) $b_n = \dfrac{4n^2+3n-4-4n^2}{\sqrt{4n^2+3n-4}+2n} = \dfrac{3-\frac{4}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}+2} \to \dfrac{3}{2+2} = \dfrac{3}{4}$.

c) $c_n = \left(\dfrac{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{3n}}{\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{3n}}\right)^{\frac{2}{3}} \to \left(\dfrac{e^{-1}}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = e^{-2}$.

4. feladat (20 pont)

Adja meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját. Létezik-e határérték?

$$a_n = \frac{n! + n^9}{9^n + (-n)^n}, \qquad b_n = \frac{9^n + (-n)^n}{n! + n^9}$$

Megoldás.

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{1+\frac{n^9}{n!}}{\left(\frac{9}{n}\right)^n + 1} \to 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{1+\frac{n^9}{n!}}{\left(\frac{9}{n}\right)^n - 1} \to 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

A sorozat egyetlen torlódási pontja a 0, vagyis $\limsup a_n = \liminf a_n = 0 = \lim a_n$.

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{n^n}{n!} \cdot \dfrac{\left(\frac{9}{n}\right)^n + 1}{1+\frac{n^9}{n!}} \to \infty, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \dfrac{n^n}{n!} \cdot \dfrac{\left(\frac{9}{n}\right)^n - 1}{1+\frac{n^9}{n!}} \to -\infty, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

A sorozat torlódási pontjainak halmaza $\{-\infty, \infty\}$, vagyis $\limsup b_n = \infty$, $\liminf b_n = -\infty$, így a sorozat nem konvergens.

5. feladat (20 pont)

Hol folytonos, hol és milyen típusú szakadása van a következő függvénynek?

$$f(x) = \frac{\sin(x+2)}{|x^2 - x - 6|}$$

A szakadási helyeken határozza meg a függvény bal és jobb oldali határértékét!

Megoldás.

$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$, tehát $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2, 3\}$. A függvény folytonos az értelmezési tartományának minden pontjában, mert folytonos függvények hányadosa, és a nevező nem nulla.

$$\lim_{x\to -2\pm 0} f(x) = \lim_{x\to -2\pm 0} \frac{\sin(x+2)}{|x+2|}\cdot\frac{1}{|x-3|} = \lim_{x\to -2\pm 0} \underbrace{\frac{\sin(x+2)}{\pm(x+2)}}_{\to \pm 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{|x-3|}}_{\to \frac{1}{5}} = \pm\frac{1}{5},$$

tehát a függvénynek a -2 pontban véges ugrás típusú szakadása van.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \underbrace{\frac{\sin(x+2)}{|x+2|}}_{\to \frac{\sin(5)}{5} < 0}\cdot\underbrace{\frac{1}{|x-3|}}_{\to +\infty} = -\infty,$$

azaz a 3 pontban a bal és a jobb oldali határérték is $-\infty$, így itt a függvénynek másodfajú szakadása van.

6. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt)

Legyen N pozitív természetes szám! Adja meg az $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{N}$ sorozat torlódási pontjait! (Segítség: Határozza meg a_{2N} értékét!)

Megoldás.

$a_{2N} = 0$. Indoklás: az origó középpontú egységkörbe írt szabályos $2N$-szög csúcsaiba mutató vektorok összege az elrendezés szimmetriája miatt a nullvektor, és $2N\cdot a_{2N}$ éppen ezen vektorok vízszintes koordinátáinak összege.

Hasonlóan igazolható, hogy ha n a $2N$ többszöröse, akkor $a_n = 0$.

Így ha $n = \alpha\cdot 2N + \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\beta < 2N$), akkor

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\beta}\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right), \qquad \text{ezért} \qquad |a_n| \le \frac{2N}{n} \to 0.$$

Tehát az (a_n) sorozat konvergens, határértéke 0, így egyetlen torlódási pontja a 0.

Az a_n képletében szereplő összegzés el is végezhető, ha észrevesszük, hogy $\cos\frac{k\pi}{N} = \mathrm{Re}(q^k)$, ahol $q = e^{i\frac{\pi}{N}}$, tehát na_n egy q hányadosú, n tagú mértani sor összegének valós része, így $a_n = \frac{1}{n}\,\mathrm{Re}\left(q\frac{1-q^n}{1-q}\right)$. Innen is megkapható, hogy $|a_n| \le \frac{1}{n}\left|q\frac{1-q^n}{1-q}\right| \le \frac{2}{n|1-q|} \to 0$.