**1. feladat (5 + 9 = 14 pont)**

a) Adja meg $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ definícióját! ($x_0$ az $f$ értelmezési tartományának torlódási pontja.)

b) A definíció alapján lássa be, hogy $\lim_{x\to 1}\sqrt{7x+9} = 4$.

*Megoldás.*

a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$.

b) Legyen $\varepsilon > 0$.

$$\left|\sqrt{7x+9} - 4\right| = \left|\frac{7x+9-16}{\sqrt{7x+9}+4}\right| < \frac{7|x-1|}{4} < \varepsilon \Longleftarrow |x-1| < \frac{4\varepsilon}{7},$$

vagyis $\delta(\varepsilon) = \dfrac{4\varepsilon}{7}$.

**2. feladat (16 pont)**

Adja meg a $z^4 - (1-2i)z^2 - i - 1 = 0$ egyenlet összes megoldását exponenciális alakban!

*Megoldás.*

Az egyenlet $z^2$-ben másodfokú:

$$z^2 = \frac{1-2i \pm \sqrt{(1-2i)^2 + 4i + 4}}{2} = \frac{1-2i \pm \sqrt{1}}{2},$$

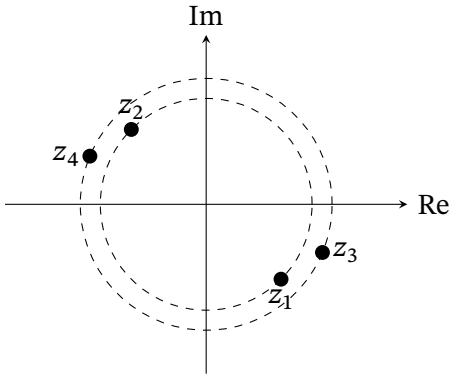
vagyis $z^2 = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ vagy $z^2 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. A gyökvonás képletével ($k \in \{0;1\}$):

$$\sqrt{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}, \qquad \sqrt{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}} = \sqrt[4]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+k\pi\right)},$$

vagyis

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_3 = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}, \quad z_4 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}.$$

A gyökök a komplex számsíkon:



**3. feladat (10 + 10 + 10 = 30 pont)**

Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

a) $a_n = \left(\frac{2n-5}{2n+3}\right)^{3n}$,

b) $b_n = \sqrt{9n^2+2n-6} - 3n$,

c) $c_n = \sqrt[n]{\frac{n^3+2n}{2n^2+4}}$.

*Megoldás.*

a) $a_n = \left(\frac{\left(1-\frac{5}{2n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{2n}}\right)^{\frac{3}{2}} \to \left(\frac{e^{-5}}{e^3}\right)^{\frac{3}{2}} = e^{-12}$.

b) $b_n = \frac{9n^2+2n-6-9n^2}{\sqrt{9n^2+2n-6}+3n} = \frac{2-\frac{6}{n}}{\sqrt{9+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2}}+3} \to \frac{2}{3+3} = \frac{1}{3}$.

c) Becsüljük a gyökjel alatti kifejezést:

$$\frac{n}{6} = \frac{n^3}{2n^2+4n^2} \le \frac{n^3+2n}{2n^2+4} \le \frac{n^3+2n^3}{2n^2} = \frac{3n}{2}.$$

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\frac{1}{6}} \le c_n \le \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \to 1.$$

Így a rendőrelv miatt $c_n \to 1$.

**4. feladat (20 pont)**

Adja meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját. Létezik-e határérték?

$$a_n = \frac{(-n)^n + 7^n}{n! + n^7}, \qquad b_n = \frac{n! + n^7}{(-n)^n + 7^n}$$

*Megoldás.*

$$a_n = \begin{cases} \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{1+\left(\frac{7}{n}\right)^n}{1+\frac{n^7}{n!}} \to \infty, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{-1+\left(\frac{7}{n}\right)^n}{1+\frac{n^7}{n!}} \to -\infty, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

A sorozat torlódási pontjainak halmaza $\{-\infty, \infty\}$, vagyis $\limsup a_n = \infty$, $\liminf a_n = -\infty$, így a

sorozat nem konvergens.

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{1+\frac{n^7}{n!}}{1+\left(\frac{7}{n}\right)^n} \to 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{1+\frac{n^7}{n!}}{-1+\left(\frac{7}{n}\right)^n} \to 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

A sorozat egyetlen torlódási pontja a 0, vagyis $\limsup b_n = \liminf b_n = 0 = \lim b_n$.

**5. feladat (20 pont)**

Hol folytonos, hol és milyen típusú szakadása van a következő függvénynek?

$$f(x) = \frac{\sin(x-3)}{|x^2-x-6|}$$

A szakadási helyeken határozza meg a függvény bal és jobb oldali határértékét!

*Megoldás.*

$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$, tehát $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$. A függvény folytonos az értelmezési tartományának minden pontjában, mert folytonos függvények hányadosa, és a nevező nem nulla.

$$\lim_{x\to 3\pm 0} f(x) = \lim_{x\to 3\pm 0} \frac{\sin(x-3)}{|x-3|} \cdot \frac{1}{|x+2|} = \lim_{x\to 3\pm 0} \underbrace{\frac{\sin(x-3)}{\pm(x-3)}}_{\to \pm 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{|x+2|}}_{\to \frac{1}{5}} = \pm\frac{1}{5},$$

tehát a függvénynek a 3 pontban véges ugrás típusú szakadása van.

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \underbrace{\frac{\sin(x-3)}{|x-3|}}_{\to \frac{\sin(-5)}{5} > 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{|x+2|}}_{\to +\infty} = +\infty,$$

azaz a $-2$ pontban a bal és a jobb oldali határérték is $+\infty$, így itt a függvénynek másodfajú szakadása van.

**6. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt)**

Legyen $N$ pozitív természetes szám! Adja meg az $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{N}$ sorozat torlódási pontjait! (Segítség: Határozza meg $a_{2N}$ értékét!)

*Megoldás.*

$a_{2N} = 0$. Indoklás: az origó középpontú egységkörbe írt szabályos $2N$-szög csúcsaiba mutató vektorok összege az elrendezés szimmetriája miatt a nullvektor, és $2N \cdot a_{2N}$ éppen ezen vektorok vízszintes koordinátáinak összege.

Hasonlóan igazolható, hogy ha $n$ a $2N$ többszöröse, akkor $a_n = 0$.

Így ha $n = \alpha \cdot 2N + \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\beta < 2N$), akkor

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\beta} \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right), \qquad \text{ezért} \qquad |a_n| \le \frac{2N}{n} \to 0.$$

Tehát az $(a_n)$ sorozat konvergens, határértéke 0, így egyetlen torlódási pontja a 0.

Az $a_n$ képletében szereplő összegzés el is végezhető, ha észrevesszük, hogy $\cos\frac{k\pi}{N} = \mathrm{Re}(q^k)$, ahol $q = e^{i\frac{\pi}{N}}$, tehát $na_n$ egy $q$ hányadosú, $n$ tagú mértani sor összegének valós része, így $a_n = \frac{1}{n}\,\mathrm{Re}\left(q\frac{1-q^n}{1-q}\right)$. Innen is megkapható, hogy $|a_n| \le \frac{1}{n}\left|q\frac{1-q^n}{1-q}\right| \le \frac{2}{n|1-q|} \to 0$.