1. feladat (16 pont)

Számolja ki a következő egyenlet (komplex) megoldásait!

$$z^4 - (2-3i)z^3 - 6iz^2 = 0$$

Megoldás.

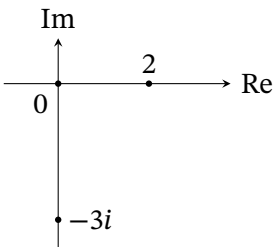
$$z^4 - (2-3i)z^3 - 6iz^2 = z^2\left(z^2 - (2-3i)z - 6i\right) = 0,$$

ha $z = 0$, vagy

$$z = \frac{2-3i \pm \sqrt{(2-3i)^2 + 24i}}{2} = \frac{2-3i \pm \sqrt{(2+3i)^2}}{2} = \frac{2-3i \pm (2+3i)}{2},$$

tehát ha $z = 2$ vagy $z = -3i$.

A gyökök a komplex számsíkon (0 kétszeres gyök):



2. feladat (10 + 10 + 10 = 30 pont)

Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét!

a) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{7^n + 5^n}{n^3 + 2}}$,

b) $b_n = \left(\dfrac{2n^2 - 3}{2n^2 + 4}\right)^{3n^2}$,

c) $c_n = \sqrt{n^3 - 5n - 3} - \sqrt{n^3 - 2n + 6}$

Megoldás.

a) A rendőrelv miatt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{7^n + 5^n}{n^3 + 2}} = 7$, mert

$$7 \leftarrow \frac{7}{\sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3} = \sqrt[n]{\frac{7^n}{3n^3}} \le \sqrt[n]{\frac{7^n + 5^n}{n^3 + 2}} \le \sqrt[n]{\frac{2 \cdot 7^n}{n^3}} = \frac{7\sqrt[n]{2}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3} \to 7.$$

b) $b_n = \left(\dfrac{\left(1 - \frac{3}{2n^2}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{4}{2n^2}\right)^{n^2}}\right)^3 \to \left(\dfrac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{4}{2}}}\right)^3 = e^{-\frac{21}{2}}$

c)

$$c_n = \frac{n^3 - 5n - 3 - (n^3 - 2n + 6)}{\sqrt{n^3 - 5n - 3} + \sqrt{n^3 - 2n + 6}} = \frac{-3n - 9}{\sqrt{n^3 - 5n - 3} + \sqrt{n^3 - 2n + 6}}$$
$$= \frac{n}{n^{3/2}} \cdot \frac{-3 - \frac{9}{n}}{\sqrt{1 - \frac{5}{n^2} - \frac{3}{n^3}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{6}{n^3}}} \to 0.$$

3. feladat (16 pont)

Adja meg az $a_n = \left(\frac{n + (-1)^n}{n + 2}\right)^{n+3}$ sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját! Konvergens-e a sorozat?

Megoldás.

Páros n esetén

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^3 \to \frac{1}{e},$$

páratlan n esetén

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n+3} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^3 \to \frac{1}{e^3},$$

így a sorozat torlódási pontjainak halmaza $\left\{\frac{1}{e}, \frac{1}{e^3}\right\}$, $\limsup a_n = \frac{1}{e}$, $\liminf a_n = \frac{1}{e^3}$, és mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$, így a sorozat divergens.

4. feladat (5 + 11 = 16 pont)

a) Adja meg a $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ definícióját! (Az x_0 a D_f torlódási pontja.)

b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim\limits_{x \to -2} \frac{5x - 2}{2x + 7} = -4$!

Megoldás.

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, melyre $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$.

b) Legyen $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{5x - 2}{2x + 7} + 4\right| = \frac{|5x - 2 + 8x + 28|}{|2x + 7|} = 13\frac{|x + 2|}{|2x + 7|}$$

A további becsléshez felhasználjuk, hogy x a -2 közelében van. Ha például $|x + 2| < 1$, akkor $-3 < x < -1$, és $1 < 2x + 7 < 5$. Tehát

$$13\frac{|x + 2|}{|2x + 7|} \leq 13|x + 2| < \varepsilon,$$

ha $|x + 2| < \frac{1}{13}\varepsilon$, így $\delta(\varepsilon) = \min\left(1, \frac{1}{13}\varepsilon\right)$.

5. feladat (22 pont)

Hol folytonos, hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x+2)}{x^2-2x-8}, & \text{ha } x\le 0\\[2ex] \dfrac{3x^2}{x-5}, & \text{ha } x>0\end{cases}$$

Megoldás.

A függvény folytonos függvények kompozíciója, így a nevező zérushelyeiben, tehát az $x=-2$ és az $x=5$ pontban van, valamint az $x=0$ pontban lehet szakadása, máshol mindenütt folytonos. ($x=4$ esetén nincs baj, hiszen ott máshogy van értelmezve a függvény.)

$$\lim_{x\to -2\pm 0} f(x)=\lim_{x\to -2\pm 0}\frac{\sin(x+2)}{x+2}\cdot\frac{1}{x-4}=1\cdot\left(-\frac{1}{6}\right),$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van.

$$\lim_{x\to 5\pm 0} f(x)=\lim_{x\to 5\pm 0}\frac{3x^2}{x-5}=\pm\infty,$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek másodfajú szakadása van.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=f(0)=\frac{-\sin 2}{8}\neq 0=\frac{3\cdot 0^2}{0-5}=\lim_{x\to 0+0}\frac{3x^2}{x-5},$$

így az $x=0$ pontban véges ugrása van a függvénynek.

6. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt)

Legyen

$$a_0=1,\qquad a_{n+1}=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a_n}.$$

Határozza meg az így definiált rekurzív sorozat torlódási pontjait! (Segítség: Vizsgálja külön a páros és páratlan indexű részsorozatot!)

Megoldás.

$$a_{n+2}=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a_n}}=2^{-\frac{4}{3}}\sqrt[9]{a_n}$$

Az $A=2^{-\frac{4}{3}}\sqrt[9]{A}$ egyenlet megoldásai: $A_0=0, A_\pm=\pm 2^{-\frac{3}{2}}=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Az (a_{2n}) részsorozat monoton csökkenően tart A_+-hoz.

Az (a_{2n+1}) részsorozat monoton növően tart A_--hoz.

Így a torlódási pontok halmaza: $S=\{A_+,A_-\}$.