1. feladat (16 pont)

Számolja ki a következő egyenlet (komplex) megoldásait!

$$z^4 - (3+4i)z^3 + 12iz^2 = 0$$

Megoldás.

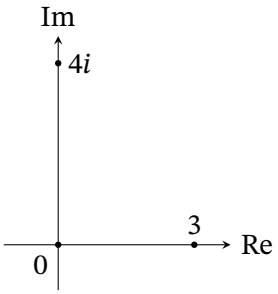
$$z^4 - (3+4i)z^3 + 12iz^2 = z^2\left(z^2 - (3+4i)z + 12i\right) = 0,$$

ha $z = 0$, vagy

$$z = \frac{3+4i \pm \sqrt{(3+4i)^2 - 48i}}{2} = \frac{3+4i \pm \sqrt{(3-4i)^2}}{2} = \frac{3+4i \pm (3-4i)}{2},$$

tehát ha $z = 3$ vagy $z = 4i$.

A gyökök a komplex számsíkon (0 kétszeres gyök):



2. feladat (10 + 10 + 10 = 30 pont)

Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét!

a) $a_n = \sqrt{n^3 - 4n - 2} - \sqrt{n^3 - 3n + 5}$,

b) $b_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^n + 2^n}{n^2 + 3}}$,

c) $c_n = \left(\dfrac{3n^3 - 5}{3n^3 + 6}\right)^{2n^3}$

Megoldás.

a)

$$a_n = \frac{n^3 - 4n - 2 - (n^3 - 3n + 5)}{\sqrt{n^3 - 4n - 2} + \sqrt{n^3 - 3n + 5}} = \frac{-n - 7}{\sqrt{n^3 - 4n - 2} + \sqrt{n^3 - 3n + 5}}$$
$$= \frac{n}{n^{3/2}} \cdot \frac{-1 - \frac{7}{n}}{\sqrt{1 - \frac{4}{n^2} - \frac{2}{n^3}} + \sqrt{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3}}} \to 0.$$

b) A rendőrelv miatt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{n^2+3}} = 3$, mert

$$3 \leftarrow \frac{3}{\sqrt[n]{4}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = \sqrt[n]{\frac{3^n}{4n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{n^2+3}} \leq \sqrt[n]{\frac{2\cdot 3^n}{n^2}} = \frac{3\sqrt[n]{2}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \to 3.$$

c) $c_n = \left(\frac{\left(1-\frac{5/3}{n^3}\right)^{n^3}}{\left(1+\frac{6/3}{n^3}\right)^{n^3}}\right)^2 \to \left(\frac{e^{-\frac{5}{3}}}{e^2}\right)^2 = e^{-\frac{22}{3}}$

3. feladat (16 pont)

Adja meg az $a_n = \left(\frac{n-(-1)^n}{n+4}\right)^{n-1}$ sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját! Konvergens-e a sorozat?

Megoldás.

Páratlan n esetén

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{n-1} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}\cdot\left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{-1} \to \frac{1}{e^3},$$

páros n esetén

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+4}\right)^{n-1} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}\cdot\left(\frac{n-1}{n+4}\right)^{-1} \to \frac{1}{e^5},$$

így a sorozat torlódási pontjainak halmaza $\left\{\frac{1}{e^3}, \frac{1}{e^5}\right\}$, $\limsup a_n = \frac{1}{e^3}$, $\liminf a_n = \frac{1}{e^5}$, és mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$, így a sorozat divergens.

4. feladat (5 + 11 = 16 pont)

a) Adja meg a $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ definícióját! (Az x_0 a D_f torlódási pontja.)

b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim\limits_{x\to -1} \frac{7x-2}{4x+7} = -3$!

Megoldás.

a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, melyre $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$.

b) Legyen $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{7x-2}{4x+7} + 3\right| = \frac{|7x-2+12x+21|}{|4x+7|} = 19\frac{|x+1|}{|4x+7|}$$

A további becsléshez felhasználjuk, hogy x a -1 közelében van. Ha például $|x+1| < \frac{1}{2}$, akkor $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$, és $1 < 4x+7 < 5$. Tehát

$$19\frac{|x+1|}{|4x+7|} < 19|x+1| < \varepsilon,$$

ha $|x+1| < \frac{1}{19}\varepsilon$, így $\delta(\varepsilon) = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{19}\varepsilon\right)$.

5. feladat (22 pont)

Hol folytonos, hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-3)}{x^2+2x-15}, & \text{ha } x \geq 0 \\ \dfrac{4x^2}{x+6}, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Megoldás.

A függvény folytonos függvények kompozíciója, így a nevező zérushelyeiben, tehát az $x = 3$ és az $x = -6$ pontban van, valamint az $x = 0$ pontban lehet szakadása, máshol mindenütt folytonos. ($x = -5$ esetén nincs baj, hiszen ott máshogy van értelmezve a függvény.)

$$\lim_{x \to 3 \pm 0} f(x) = \lim_{x \to 3 \pm 0} \frac{\sin(x-3)}{x-3} \cdot \frac{1}{x+5} = 1 \cdot \frac{1}{8},$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van.

$$\lim_{x \to -6 \pm 0} f(x) = \lim_{x \to -6 \pm 0} \frac{4x^2}{x+6} = \pm\infty,$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek másodfajú szakadása van.

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = f(0) = \frac{\sin 3}{15} \neq 0 = \frac{4 \cdot 0^2}{0+6} = \lim_{x \to 0-0} \frac{4x^2}{x+6},$$

így az $x = 0$ pontban véges ugrása van a függvénynek.

6. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt)

Legyen

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{a_n}.$$

Határozza meg az így definiált rekurzív sorozat torlódási pontjait! (Segítség: Vizsgálja külön a páros és páratlan indexű részsorozatot!)

Megoldás.

$$a_{n+2} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a_n}} = 2^{-\frac{4}{3}}\sqrt[9]{a_n}$$

Az $A = 2^{-\frac{4}{3}}\sqrt[9]{A}$ egyenlet megoldásai: $A_0 = 0, A_\pm = \pm 2^{-\frac{3}{2}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Az (a_{2n}) részsorozat monoton csökkenően tart A_+-hoz.

Az (a_{2n+1}) részsorozat monoton növően tart A_--hoz.

Így a torlódási pontok halmaza: $S = \{A_+, A_-\}$.