1. feladat (10 + 10 = 20 pont)

Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

a) $a_n = \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 5}$;

b) $b_n = \left(\frac{2n-3}{5+2n}\right)^{n+2}$

Megoldás.

a) $n \geq 4$ esetén $n^2 \leq 2^n$ és $5 \leq 2^n$, így

$$2 = \sqrt[n]{2^n} \leq a_n \leq \sqrt[n]{3 \cdot 2^n} = \sqrt[n]{3} \cdot 2 \to 2,$$

tehát a rendőrelv miatt $a_n \to 2$.

b)

$$b_n = \frac{\left(1 - \frac{3/2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{5/2}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{2n-3}{2n+5}\right)^2 \to \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{5}{2}}} \cdot 1 = e^{-4}$$

2. feladat (10 + 10 + 10 = 30 pont)

$$a_1 = 2; \qquad a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 4}$$

a) Igazolja, hogy a fent megadott rekurzív sorozat elemeire $1 < a_n < 4$ teljesül!

b) Igazolja, hogy a sorozat monoton növő!

c) Igazolja, hogy létezik a sorozat határértéke, és adja is meg!

Megoldás.

a) Teljes indukcióval: $1 < a_1 = 2 < 4$. Ha $1 < a_n < 4$, akkor $1 < 5a_n - 4 < 16$, így $1 < a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 4} < 4$.

b) Mivel $a_n > 0$, ezért

$$a_{n+1} > a_n \iff 5a_n - 4 > a_n^2 \iff (a_n - 1)(a_n - 4) < 0,$$

ami az a) rész miatt teljesül. A sorozat tehát (szigorúan) monoton növő.

c) A sorozat monoton és korlátos, így konvergens; legyen $A = \lim a_n$. A rekurzióban határértéket véve (a gyökfüggvény folytonos) $A = \sqrt{5A - 4}$, azaz $A^2 - 5A + 4 = 0$, így $A = 1$ vagy $A = 4$. Mivel a sorozat növő, $A \geq a_1 = 2$, tehát $\lim a_n = 4$.

3. feladat (7 + 13 = 20 pont)

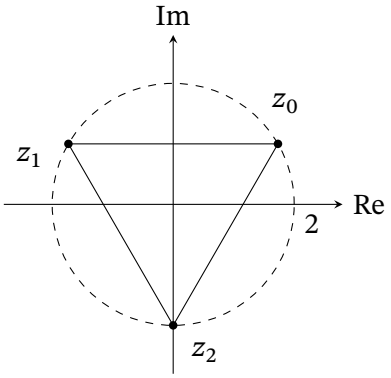
a) $\frac{2+3i}{i+4} = ?$ Az eredményt algebrai alakban adja meg!

b) $\sqrt[3]{8i} = ?$ A gyököket trigonometrikus vagy exponenciális alakban adja meg, és ábrázolja is!

Megoldás.

a)
$$\frac{2+3i}{i+4} = \frac{(2+3i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \frac{8-2i+12i-3i^2}{17} = \frac{11}{17} + \frac{10}{17}i$$

b) $8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, így
$$z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2,$$
azaz $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ és $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$. A gyökök egy origó középpontú, 2 sugarú körbe írt szabályos háromszög csúcsai:



4. feladat (14 + 8 + 8 = 30 pont)

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$$

a) A megfelelő definícióval igazolja, hogy $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \frac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = ?$ (Számolási szabályokkal.)

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = ?$ (Számolási szabályokkal.)

Megoldás.

$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ és $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, így $x \neq \pm 2$ esetén $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$.

a) Igazolni kell, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $0 < |x-4| < \delta(\varepsilon)$ esetén $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$. Legyen $\varepsilon > 0$.
$$\left|\frac{x-3}{x-2} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|2x-6-x+2|}{2|x-2|} = \frac{|x-4|}{2|x-2|}$$
Ha $|x-4| < 1$, akkor $3 < x < 5$, így $|x-2| > 1$, tehát
$$\frac{|x-4|}{2|x-2|} < \frac{|x-4|}{2} < \varepsilon,$$
ha $|x-4| < 2\varepsilon$. Így $\delta(\varepsilon) = \min(1, 2\varepsilon)$.

b)
$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 1$$

5. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt)

Írja fel azt a $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt, amely a komplex számsíkon az 1 pont körül 60°-kal forgat pozitív (az óramutató járásával ellenkező) irányban!

Megoldás.

Az 1 pont körüli forgatás: eltoljuk a síkot úgy, hogy az 1 az origóba kerüljön, az origó körül elforgatunk ($e^{i\varphi}$-vel szorzunk), majd visszatoljuk. A 60°-os pozitív irányú forgatás az $e^{i\frac{\pi}{3}}$-mal való szorzás, így

$$g(z) = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}(z-1) = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z-1).$$

Például a $z = 0$ pont képe $g(0) = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$:

