**1. feladat (10 + 10 = 20 pont)**

Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

a) $a_n = \sqrt[n]{n^4 + 3^n + 6}$;

b) $b_n = \left(\frac{3n-4}{5+3n}\right)^{n-1}$

*Megoldás.*

a) $n \geq 8$ esetén $n^4 \leq 3^n$ és $6 \leq 3^n$, így

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq a_n \leq \sqrt[n]{3 \cdot 3^n} = \sqrt[n]{3} \cdot 3 \to 3,$$

tehát a rendőrelv miatt $a_n \to 3$.

b)

$$b_n = \frac{\left(1 - \frac{4/3}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{5/3}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{3n-4}{3n+5}\right)^{-1} \to \frac{e^{-\frac{4}{3}}}{e^{\frac{5}{3}}} \cdot 1 = e^{-3}$$

**2. feladat (10 + 10 + 10 = 30 pont)**

$$a_1 = 3; \qquad a_{n+1} = \sqrt{8a_n - 12}$$

a) Igazolja, hogy a fent megadott rekurzív sorozat elemeire $2 < a_n < 6$ teljesül!

b) Igazolja, hogy a sorozat monoton növő!

c) Igazolja, hogy létezik a sorozat határértéke, és adja is meg!

*Megoldás.*

a) Teljes indukcióval: $2 < a_1 = 3 < 6$. Ha $2 < a_n < 6$, akkor $4 < 8a_n - 12 < 36$, így $2 < a_{n+1} = \sqrt{8a_n - 12} < 6$.

b) Mivel $a_n > 0$, ezért

$$a_{n+1} > a_n \iff 8a_n - 12 > a_n^2 \iff (a_n - 2)(a_n - 6) < 0,$$

ami az a) rész miatt teljesül. A sorozat tehát (szigorúan) monoton növő.

c) A sorozat monoton és korlátos, így konvergens; legyen $A = \lim a_n$. A rekurzióban határértéket véve (a gyökfüggvény folytonos) $A = \sqrt{8A - 12}$, azaz $A^2 - 8A + 12 = 0$, így $A = 2$ vagy $A = 6$. Mivel a sorozat növő, $A \geq a_1 = 3$, tehát $\lim a_n = 6$.

**3. feladat (7 + 13 = 20 pont)**

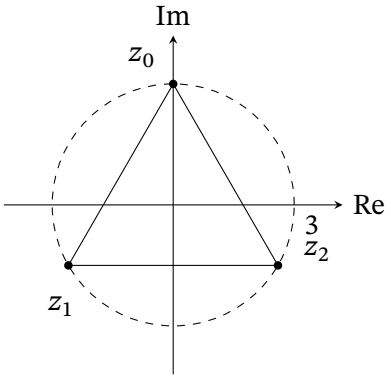
a) $\frac{5+2i}{i+3} = ?$ Az eredményt algebrai alakban adja meg!

b) $\sqrt[3]{-27i} = ?$ A gyököket trigonometrikus vagy exponenciális alakban adja meg, és ábrázolja is!

*Megoldás.*

a)
$$\frac{5+2i}{i+3} = \frac{(5+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{15-5i+6i-2i^2}{10} = \frac{17}{10} + \frac{1}{10}i$$

b) $-27i = 27\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, így
$$z_k = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2,$$
azaz $z_0 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$, $z_1 = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}$ és $z_2 = 3e^{i\frac{11\pi}{6}}$. A gyökök egy origó középpontú, 3 sugarú körbe írt szabályos háromszög csúcsai:




**4. feladat (14 + 8 + 8 = 30 pont)**

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$$

a) A megfelelő definícióval igazolja, hogy $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \frac{4}{5}$.

b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = ?$ (Számolási szabályokkal.)

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$ (Számolási szabályokkal.)

*Megoldás.*

$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ és $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$, így $x \neq \pm 3$ esetén $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$.

a) Igazolni kell, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $0 < |x-2| < \delta(\varepsilon)$ esetén $\left|f(x) - \frac{4}{5}\right| < \varepsilon$. Legyen $\varepsilon > 0$.
$$\left|\frac{x+2}{x+3} - \frac{4}{5}\right| = \frac{|5x+10-4x-12|}{5|x+3|} = \frac{|x-2|}{5|x+3|}$$
Ha $|x-2| < 1$, akkor $1 < x < 3$, így $|x+3| > 4$, tehát
$$\frac{|x-2|}{5|x+3|} < \frac{|x-2|}{20} < \varepsilon,$$
ha $|x-2| < 20\varepsilon$. Így $\delta(\varepsilon) = \min(1, 20\varepsilon)$.

b)

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x+3} = \frac{5}{6}$$

c)

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}} = 1$$

**5. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt)**

Írja fel azt a $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt, amely a komplex számsíkon az $i$ pont körül 45°-kal forgat negatív (az óramutató járásával egyező) irányban!

*Megoldás.*

Az $i$ pont körüli forgatás: eltoljuk a síkot úgy, hogy az $i$ az origóba kerüljön, az origó körül elforgatunk ($e^{i\varphi}$-vel szorzunk), majd visszatoljuk. A 45°-os negatív irányú forgatás az $e^{-i\frac{\pi}{4}}$-gyel való szorzás, így

$$g(z) = i + e^{-i\frac{\pi}{4}}(z-i) = i + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(z-i).$$

Például a $z = 0$ pont képe $g(0) = i - ie^{-i\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$:

