1. feladat (10 pont)

Definícióval igazolja a következő állítás helyességét! ($N(\varepsilon) = ?$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+2} = 2$$

Megoldás.

Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$\left|\frac{2n-1}{n+2} - 2\right| = \frac{|2n-1-2n-4|}{n+2} = \frac{5}{n+2} < \frac{5}{n} < \varepsilon,$$

ha $n > \frac{5}{\varepsilon}$, így $N(\varepsilon) = \left[\frac{5}{\varepsilon}\right] + 1$.

2. feladat (10 + 10 + 10 = 30 pont)

Határozza meg a következő sorozatok határértékét! (Tanult szabályokat, tételeket használhat.)

a) $a_n = \sqrt{n^2+5n} - n$;

b) $b_n = \sqrt[n]{\frac{n^2+2}{n+3}}$;

c) $c_n = \frac{3^n + n^2}{n! + 2^n}$.

Megoldás.

a)
$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+5n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+5n} + n\right)}{\sqrt{n^2+5n} + n} = \frac{5n}{\sqrt{n^2+5n} + n} = \frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{n}} + 1} \to \frac{5}{2}$$

b) Minden $n \geq 1$ esetén $\frac{n}{4} = \frac{n^2}{4n} \leq \frac{n^2+2}{n+3} \leq \frac{3n^2}{n} = 3n$, így

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{1}{4}}\sqrt[n]{n} \leq b_n \leq \sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n} \to 1,$$

tehát a rendőrelv miatt $b_n \to 1$.

c)
$$c_n = \frac{3^n}{n!} \cdot \frac{1 + \frac{n^2}{3^n}}{1 + \frac{2^n}{n!}} \to 0 \cdot \frac{1+0}{1+0} = 0,$$

mert $\frac{3^n}{n!} \to 0$, $\frac{n^2}{3^n} \to 0$ és $\frac{2^n}{n!} \to 0$.

3. feladat (6 + 6 + 9 + 9 = 30 pont)

$$z_1 = 3\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right), \qquad z_2 = -1 + \sqrt{3} \cdot i$$

Határozza meg a következő mennyiségeket az előírt alakban!

a) z_1, algebrai alakban;

b) z_2, exponenciális vagy trigonometrikus alakban;

c) $z_1 \cdot z_2$, algebrai alakban;

d) z_2^8, exponenciális vagy trigonometrikus alakban.

Megoldás.

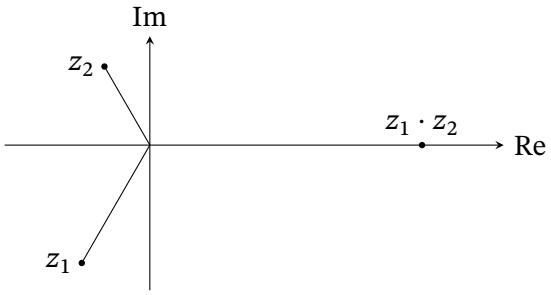
a)
$$z_1 = 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

b) $|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$, és $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, így $\varphi = \frac{2\pi}{3}$:
$$z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

c) Trigonometrikus alakban szorozva:
$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 6(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 6$$

d)
$$z_2^8 = 2^8 e^{i\frac{16\pi}{3}} = 256e^{i\frac{4\pi}{3}} = 256\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

A számok a komplex számsíkon (z_2^8 hossza (256) miatt nem fér az ábrára; argumentuma $\frac{4\pi}{3}$, ugyanaz, mint z_1-é.):



4. feladat (10 + 10 + 10 = 30 pont)

$$f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 - 1}$$

Határozza meg a következő határértékeket! (Tanult szabályokat, tételeket használhat.)

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$

b) $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x) = ?$

c) $\lim\limits_{x\to+1-0} f(x) = ?$

Megoldás.

$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ és $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

a) $x > 2$ esetén $|x^2 - x - 2| = x^2 - x - 2$, így

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

b) Ha $-1 < x < 1$, akkor $x - 2 < 0$ és $x + 1 > 0$, így $|x^2 - x - 2| = (2 - x)(x + 1)$, tehát

$$\lim_{x\to-1+0} f(x) = \lim_{x\to-1+0} \frac{(2-x)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to-1+0} \frac{2-x}{x-1} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

c)

$$\lim_{x\to1-0} f(x) = \lim_{x\to1-0} \frac{\overbrace{|x^2 - x - 2|}^{\to 2}}{\underbrace{x^2 - 1}_{\to 0-0}} = -\infty$$

5. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt)

Határozza meg az

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{2\pi}{3}\right)$$

numerikus sorozat torlódási pontjait, limesz inferiorját és limesz szuperiorját! Létezik-e a sorozat határértéke? (Indokoljon!)

Megoldás.

Mivel $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, ezért $a_n = \cos\frac{2n\pi}{3}$, ami 3-as periódussal ismétlődik:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } 3 \mid n, \\ -\frac{1}{2}, & \text{ha } 3 \nmid n. \end{cases}$$

Mindkét érték végtelen sokszor fordul elő, így a torlódási pontok halmaza $\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$, $\liminf a_n = -\frac{1}{2}$ és $\limsup a_n = 1$.

A sorozatnak nincs határértéke, mert két torlódási pontja van ($\liminf a_n \neq \limsup a_n$).