1. feladat (10 pont)

Definícióval igazolja a következő állítás helyességét! ($N(\varepsilon) = ?$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n+5} = 3$$

Megoldás.

Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$\left|\frac{3n-1}{n+5} - 3\right| = \frac{|3n-1-3n-15|}{n+5} = \frac{16}{n+5} < \frac{16}{n} < \varepsilon,$$

ha $n > \frac{16}{\varepsilon}$, így $N(\varepsilon) = \left[\frac{16}{\varepsilon}\right] + 1$.

2. feladat (10 + 10 + 10 = 30 pont)

Határozza meg a következő sorozatok határértékét! (Tanult szabályokat, tételeket használhat.)

a) $a_n = \sqrt{n^2+2n} - n$;

b) $b_n = \sqrt[n]{\frac{n^3+1}{n+5}}$;

c) $c_n = \frac{n! + 3^n}{5^n + n^3}$.

Megoldás.

a)
$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+2n} + n\right)}{\sqrt{n^2+2n} + n} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n} + n} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1} \to 1$$

b) Minden $n \geq 1$ esetén $\frac{n^2}{6} = \frac{n^3}{6n} \leq \frac{n^3+1}{n+5} \leq \frac{2n^3}{n} = 2n^2$, így

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{1}{6}}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \leq b_n \leq \sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1,$$

tehát a rendőrelv miatt $b_n \to 1$.

c)
$$c_n = \frac{n!}{5^n} \cdot \frac{1 + \frac{3^n}{n!}}{1 + \frac{n^3}{5^n}} \to \infty,$$

mert $\frac{n!}{5^n} \to \infty$, a második tényező pedig 1-hez tart, hiszen $\frac{3^n}{n!} \to 0$ és $\frac{n^3}{5^n} \to 0$.

3. feladat (6 + 6 + 9 + 9 = 30 pont)

$$z_1 = 5\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right), \qquad z_2 = -1 - \sqrt{3} \cdot i$$

Határozza meg a következő mennyiségeket az előírt alakban!

a) z_1, algebrai alakban;

b) z_2, exponenciális vagy trigonometrikus alakban;

c) $z_1 \cdot z_2$, algebrai alakban;

d) z_2^{10}, exponenciális vagy trigonometrikus alakban.

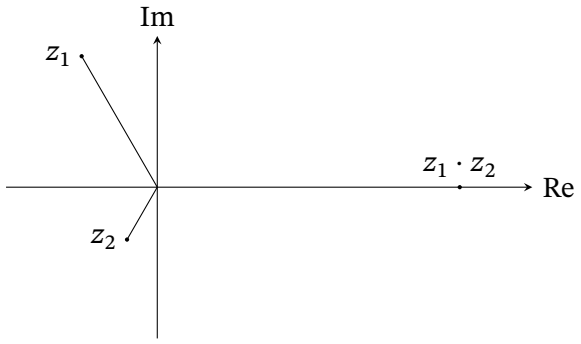
Megoldás.

a)
$$z_1 = 5\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

b) $|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$, és $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, így $\varphi = \frac{4\pi}{3}$:
$$z_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

c) Trigonometrikus alakban szorozva:
$$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = 10(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 10$$

d)
$$z_2^{10} = 2^{10}e^{i\frac{40\pi}{3}} = 1024e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1024\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$
A számok a komplex számsíkon (z_2^{10} hossza (1024) miatt nem fér az ábrára; argumentuma $\frac{4\pi}{3}$, ugyanaz, mint z_2-é.):



4. feladat (10 + 10 + 10 = 30 pont)

$$f(x) = \frac{|x^2 + x - 2|}{x^2 - 1}$$

Határozza meg a következő határértékeket! (Tanult szabályokat, tételeket használhat.)

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$

b) $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x) = ?$

c) $\lim\limits_{x\to+1+0} f(x) = ?$

Megoldás.

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$ és $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

a) $x>1$ esetén $|x^2+x-2|=x^2+x-2$, így

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$$

b)

$$\lim_{x\to-1-0} f(x)=\lim_{x\to-1-0}\frac{\overbrace{|x^2+x-2|}^{\to 2}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0+0}}=+\infty$$

c) Ha $x>1$, akkor $|x^2+x-2|=(x+2)(x-1)$, tehát

$$\lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1+0}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}$$

5. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt)

Határozza meg az

$$a_n=\sin\left(n\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$$

numerikus sorozat torlódási pontjait, limesz inferiorját és limesz szuperiorját! Létezik-e a sorozat határértéke? (Indokoljon!)

Megoldás.

Mivel $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$, ezért $a_n=-\cos\frac{2n\pi}{3}$, ami 3-as periódussal ismétlődik:

$$a_n=\begin{cases}-1, & \text{ha } 3\mid n,\\ \frac{1}{2}, & \text{ha } 3\nmid n.\end{cases}$$

Mindkét érték végtelen sokszor fordul elő, így a torlódási pontok halmaza $\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$, $\liminf a_n=-1$ és $\limsup a_n=\frac{1}{2}$.

A sorozatnak nincs határértéke, mert két torlódási pontja van ($\liminf a_n\neq\limsup a_n$).