1. feladat (4 + 8 = 12 pont)

a) Mit értünk azon, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$? (Adja meg a definíciót!)

b) A definíció alapján igazolja a következő állítás helyességét!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 9n}{n-3} = +\infty$$

Megoldás.

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ha minden $P > 0$ számhoz létezik $N(P) \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N(P)$ esetén $a_n > P$.

b) $n \neq 3$ esetén (az $n = 3$ helyen a tört nincs értelmezve)

$$\frac{n^3 - 9n}{n-3} = \frac{n(n-3)(n+3)}{n-3} = n(n+3).$$

Legyen $P > 0$. Ekkor

$$n(n+3) > n^2 > P,$$

ha $n > \sqrt{P}$, így $N(P) = \max\left(4, \left[\sqrt{P}\right] + 1\right)$.

2. feladat (12 + 12 + 12 = 36 pont)

Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n} - n}$;

b) $b_n = \left(\dfrac{2n-3}{5+2n}\right)^{n+2}$;

c) $c_n = \sqrt[n]{\dfrac{2^n+5}{n^2+1}}$

Megoldás.

a)

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{(n^2+2n)-n^2} = \frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{2n} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{2} \to 1$$

b)

$$b_n = \frac{\left(1 - \frac{3/2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{5/2}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{2n-3}{2n+5}\right)^2 \to \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{5}{2}}} \cdot 1 = e^{-4}$$

c) $n \geq 3$ esetén $5 \leq 2^n$ és $n^2 + 1 \leq 2n^2$, így

$$\frac{2^n}{2n^2} \leq \frac{2^n+5}{n^2+1} \leq \frac{2 \cdot 2^n}{n^2},$$

tehát

$$2 \leftarrow \frac{2}{\sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \leq c_n \leq \frac{2\sqrt[n]{2}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \to 2,$$

így a rendőrelv miatt $c_n \to 2$.

3. feladat (8 + 14 = 22 pont)

a) $\dfrac{3+2i}{3i-5} = ?$ Az eredményt algebrai alakban adja meg!

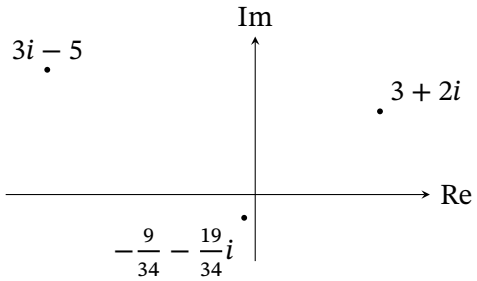
b) $\sqrt[5]{-32} = ?$ A gyököket trigonometrikus vagy exponenciális alakban adja meg, és ábrázolja is!

Megoldás.

a)

$$\frac{3+2i}{3i-5} = \frac{(3+2i)(-5-3i)}{(-5+3i)(-5-3i)} = \frac{-15-9i-10i-6i^2}{(-5)^2+3^2} = -\frac{9}{34} - \frac{19}{34}i$$

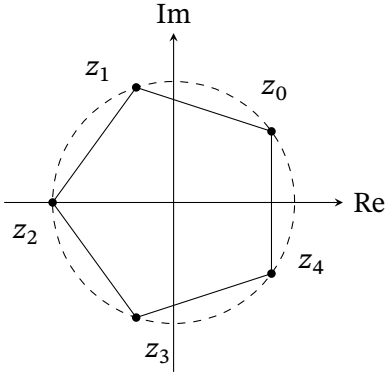
A számok a komplex számsíkon:



b) $-32 = 32(\cos\pi + i\sin\pi)$, így a gyökvonás képletével

$$z_k = \sqrt[5]{32}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{5}\right), \quad k = 0,1,2,3,4,$$

azaz $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{5}}$, $z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{5}}$, $z_2 = 2e^{i\pi} = -2$, $z_3 = 2e^{i\frac{7\pi}{5}}$ és $z_4 = 2e^{i\frac{9\pi}{5}}$. A gyökök egy origó középpontú, 2 sugarú körbe írt szabályos ötszög csúcsai:



4. feladat (14 + 8 + 8 = 30 pont)

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-x-6}$$

a) A megfelelő definícióval igazolja, hogy $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = ?$ (Számolási szabályokkal.)

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = ?$ (Számolási szabályokkal.)

Megoldás.

$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ és $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, így $x \neq 3, -2$ esetén $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$.

a) Igazolni kell, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $0 < |x+1| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - 2| < \varepsilon$. Legyen $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{x+3}{x+2} - 2\right| = \frac{|x+3-2x-4|}{|x+2|} = \frac{|x+1|}{|x+2|}$$

Ha $|x+1| < \frac{1}{2}$, akkor $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$, így $|x+2| > \frac{1}{2}$, tehát

$$\frac{|x+1|}{|x+2|} < 2|x+1| < \varepsilon,$$

ha $|x+1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Így $\delta(\varepsilon) = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

b)
$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x+2} = \frac{0}{-1} = 0$$

c)
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$$