1. feladat (6 + 14 = 20 pont)

a) Definiálja, mit jelent, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós sorozat határértéke $A \in \mathbb{R}$!

b) A definíció alapján igazolja az alábbi határértéket! ($N(\varepsilon) = ?$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+n+1}{2n^2+20} = 3$$

Megoldás.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$.

b) Helyettesítsünk be a definícióban szereplő egyenlőtlenségbe:

$$\left|\frac{6n^2+n+1}{2n^2+20} - 3\right| = \left|\frac{6n^2+n+1-6n^2-60}{2n^2+20}\right| = \frac{|n-59|}{2n^2+20}.$$

$|n-59| = n-59$, ha $n \geq 59$, ekkor:

$$\frac{|n-59|}{2n^2+20} = \frac{n-59}{2n^2+20}.$$

Becsüljük felül a törtünket. Ezt a számláló növelésével, illetve a nevező csökkentésével tudjuk elérni:

$$\frac{n-59}{2n^2+20} \leq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad n > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

A megoldás tehát:

$$N(\varepsilon) > \max\left\{\frac{1}{2\varepsilon}; 59\right\}, \qquad \text{vagy} \qquad N(\varepsilon) = \left[\max\left\{\frac{1}{2\varepsilon}; 59\right\}\right] + 1.$$

2. feladat (10 + 10 + 10 = 30 pont)

Határozza meg (a tanult tételek, szabályok alapján) a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\ln(n) + 3\cdot 2^{2n+1}}{4^{n+3}+5n^6} = ?$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+5n+1} - n = ?$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+3}{5+2n}\right)^{n+3} = ?$

Megoldás.

a) **Szöveges megoldás**

A számlálóban a leggyorsabban növekvő tag a $3\cdot 2^{2n+1} = 6\cdot 4^n$, hiszen

$$n\ln n \ll n^2 \ll 4^n.$$

A nevezőben a leggyorsabban növekvő tag a $4^{n+3} = 64\cdot 4^n$, hiszen

$$n^6 \ll 4^n.$$

Mivel mind a számlálóban, mind a nevezőben a $c \cdot 4^n$ a domináns tag, ezért a határérték ezen tagok együtthatóinak hányadosa lesz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\,\ln(n) + 3 \cdot 2^{2n+1}}{4^{n+3} + 5n^6} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}.$$

Másik megoldás

$3 \cdot 2^{2n+1} = 6 \cdot 4^n$ és $4^{n+3} = 64 \cdot 4^n$, így

$$\frac{n\ln(n) + 6 \cdot 4^n}{64 \cdot 4^n + 5n^6} = \frac{\frac{n\ln(n)}{4^n} + 6}{64 + \frac{5n^6}{4^n}} \to \frac{6}{64} = \frac{3}{32}.$$

b) Behelyettesítéssel $(\infty - \infty)$ típusú határozatlan alakot kapunk. Alkalmazzuk a gyökös kifejezések racionalizálását, vagyis bővítsük a kifejezést a konjugáltjával:

$$\sqrt{n^2 + 5n + 1} - n = \frac{(n^2 + 5n + 1) - n^2}{\sqrt{n^2 + 5n + 1} + n} = \frac{5n + 1}{\sqrt{n^2 + 5n + 1} + n}.$$

A határérték tehát:

$$= \frac{5n + 1}{\sqrt{n^2 + 5n + 1} + n} = \frac{5 + 1/n}{\sqrt{1 + 5/n + 1/n^2} + 1} \to \frac{5}{1 + 1} = \frac{5}{2}.$$

c) **Számláló és nevező együtt kezelésével**

$$\left(\frac{2n + 3}{5 + 2n}\right)^{n+3} = \left(\frac{2n + 5 - 2}{5 + 2n}\right)^{n+3} = \left[\left(1 + \frac{-2}{5 + 2n}\right)^{5+2n}\right]^{\frac{n+3}{5+2n}} \to \left[e^{-2}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{-1}$$

Számláló és nevező külön kezelésével

$$\left(\frac{2n + 3}{5 + 2n}\right)^{n+3} = \frac{\left(1 + \frac{3/2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{5/2}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{2n + 3}{2n + 5}\right)^3 \to \frac{e^{3/2}}{e^{5/2}} \cdot 1 = e^{-1}$$

3. feladat (7 + 13 = 20 pont)

a) $\dfrac{2 + 3i}{i + 4} = ?$ Az eredményt algebrai alakban adja meg!

b) $\sqrt[3]{8i} = ?$ A gyököket trigonometrikus vagy exponenciális alakban adja meg, és ábrázolja is!

Megoldás.

a) Bővítsük a törtünket a nevező konjugáltjával, majd végezzük el a megfelelő egyszerűsítéseket:

$$\frac{2 + 3i}{i + 4} = \frac{(2 + 3i)(4 - i)}{(4 + i)(4 - i)} = \frac{8 - 2i + 12i - 3i^2}{4^2 + 1^2} = \frac{11}{17} + \frac{10}{17}i.$$

b) **Szöveges gondolatmenet**

A $z = 8i$ egy olyan komplex szám, amelynek valós része $\mathrm{Re}\{z\} = 0$, képzetes része pedig $\mathrm{Im}\{z\} = 8 > 0$.

Tehát a hossza $r = |z| = 8$, argumentuma pedig $\arg\{z\} = 90° = \pi/2$.

A harmadik gyökök hossza $\sqrt[3]{8} = 2$ lesz, az egyik gyök argumentuma pedig pont az eredeti szám argumentumának harmada, vagyis $\varphi_1 = 90°/3 = 30° = \pi/6$. A másik két gyököt az előbb meghatározott gyök $120° = 2\pi/3$, illetve $240° = 4\pi/3$-mal való elforgatásával kaphatjuk meg. Tehát a gyökök:

$$\sqrt[3]{8i} = \begin{cases} 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}, \\ 2 \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}, \\ 2 \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}} = -2i. \end{cases}$$

Másik megoldás

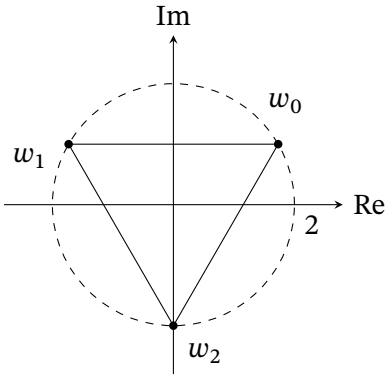
$8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, így

$$w_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right), \quad k \in \{0;1;2\}.$$

A gyökök tehát:

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$
$$w_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right),$$
$$w_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i.$$

A gyökök egy origó középpontú, 2 sugarú körbe írt szabályos háromszög csúcsai:



4. feladat (8 + 22 = 30 pont)

$$f(x) = \frac{x \cdot \sin(x^2 - 4)}{x^2 - 5x + 6}$$

a) Határozza meg azt a legbővebb $D_f \subset \mathbb{R}$ halmazt, ahol a függvény értelmezhető! Mely pontokban folytonos a függvény, miért?

b) Határozza meg a függvény szakadási helyeit és a szakadások típusait! A szakadási pontokban adja meg a függvény bal és jobb oldali határértékét is!

Megoldás.

a) A nevező gyöktényezős alakban:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2).$$

A nullával való osztást nem értelmezzük, ezért $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

A függvény D_f minden pontjában folytonos, mert folytonos függvények hányadosa.

b) Az $x = 2$ pontban:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \underbrace{\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x(x+2)}{x-3}}_{\to \frac{2\cdot 4}{-1}} = -8,$$

a bal és a jobb oldali határérték is -8, így itt megszüntethető (elsőfajú) szakadása van a függvénynek.

Az $x = 3$ pontban:

$$\lim_{x\to 3\pm 0} f(x) = \lim_{x\to 3\pm 0} \frac{\overbrace{x\sin(x^2-4)}^{\to 3\sin 5<0}}{\underbrace{(x-2)(x-3)}_{\to 0\pm 0}} = \mp\infty,$$

vagyis a bal oldali határérték $+\infty$, a jobb oldali $-\infty$, így itt másodfajú szakadása van a függvénynek.

5. feladat (5 + 5 = 10 pont, IMSC-seknek javasolt)

a) Adjon példát olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelynek a nulla kivételével minden helyen zérus a határértéke, de a nullában nem létezik a határértéke!

b) Igazolja, hogy nem létezik olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelynek a nullában 1 a határértéke, minden más pontban pedig nulla!

Megoldás.

a) Például legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = \frac{1}{n} \text{ valamilyen } n \in \mathbb{N}^+ \text{ esetén,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mivel az $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$ halmaznak egyetlen torlódási pontja a 0, ezért minden $a \neq 0$ pontnak létezik olyan kipontozott környezete, amelyben $f \equiv 0$. Így

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad (a \neq 0).$$

A nullában viszont a határérték nem létezik, hiszen

$$\frac{1}{n} \to 0, \qquad -\frac{1}{n} \to 0,$$

ugyanakkor

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \to 1, \qquad f\left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \to 0.$$

A Heine-féle átviteli elv alapján tehát

$$\lim_{x\to 0} f(x) \text{ nem létezik.}$$

b) **Bizonyítás indirekt módon**

Tegyük fel, hogy létezik ilyen függvény. Mivel

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1,$$

ezért $\varepsilon = \frac{1}{2}$-höz létezik $\delta > 0$, hogy

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}.$$

Tekintsük az $a = \frac{\delta}{2}$ pontot. Mivel $a \neq 0$, a feltevés szerint

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Ugyanakkor a a $(0, \delta)$ intervallum belső pontja, így létezik olyan környezete, amelyben minden x-re

$$\frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}.$$

Ezért a határértékekre vonatkozó egyenlőtlenségi tétel alapján

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq \frac{3}{2},$$

ami ellentmond annak, hogy $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Következésképpen: nem létezik ilyen függvény.