1. feladat (6 + 14 = 20 pont)

a) Definiálja, mit jelent, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós sorozat határértéke $A \in \mathbb{R}$!

b) A definíció alapján igazolja az alábbi határértéket! ($N(\varepsilon) = ?$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+n+1}{3n^2+30} = 2$$

Megoldás.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$.

b) Helyettesítsünk be a definícióban szereplő egyenlőtlenségbe:

$$\left|\frac{6n^2+n+1}{3n^2+30} - 2\right| = \left|\frac{6n^2+n+1-6n^2-60}{3n^2+30}\right| = \frac{|n-59|}{3n^2+30}.$$

$|n-59| = n-59$, ha $n \geq 59$, ekkor:

$$\frac{|n-59|}{3n^2+30} = \frac{n-59}{3n^2+30}.$$

Becsüljük felül a törtünket. Ezt a számláló növelésével, illetve a nevező csökkentésével tudjuk elérni:

$$\frac{n-59}{3n^2+30} \leq \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3n} < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad n > \frac{1}{3\varepsilon}.$$

A megoldás tehát:

$$N(\varepsilon) > \max\left\{\frac{1}{3\varepsilon}; 59\right\}, \qquad \text{vagy} \qquad N(\varepsilon) = \left[\max\left\{\frac{1}{3\varepsilon}; 59\right\}\right] + 1.$$

2. feladat (10 + 10 + 10 = 30 pont)

Határozza meg (a tanult tételek, szabályok alapján) a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\ln(n) + 3\cdot 3^{2n-1}}{3^{n+2}+6n^4} = ?$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n+2} - n = ?$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+2}{7+3n}\right)^{n+2} = ?$

Megoldás.

a) **Szöveges megoldás**

A számlálóban a leggyorsabban növekvő tag a $3\cdot 3^{2n-1} = 9^n$, hiszen

$$n\ln n \ll n^2 \ll 9^n.$$

A nevezőben a leggyorsabban növekvő tag a $3^{n+2} = 9\cdot 3^n$, hiszen

$$n^4 \ll 3^n.$$

Mivel a számlálóban a 9^n, a nevezőben pedig a $c \cdot 3^n$ a domináns tag, és 9^n sokkal gyorsabban nő, mint 3^n, ezért a határérték végtelen lesz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\,\ln(n) + 3 \cdot 3^{2n-1}}{3^{n+2} + 6n^4} = \infty.$$

Másik megoldás

$3 \cdot 3^{2n-1} = 9^n$ és $3^{n+2} = 9 \cdot 3^n$, így

$$\frac{n\ln(n) + 9^n}{9 \cdot 3^n + 6n^4} = \frac{\frac{n\ln(n)}{3^n} + 3^n}{9 + \frac{6n^4}{3^n}} \to \infty.$$

b) Behelyettesítéssel $(\infty - \infty)$ típusú határozatlan alakot kapunk. Alkalmazzuk a gyökös kifejezések racionalizálását, vagyis bővítsük a kifejezést a konjugáltjával:

$$\sqrt{n^2+3n+2} - n = \frac{(n^2+3n+2) - n^2}{\sqrt{n^2+3n+2} + n} = \frac{3n+2}{\sqrt{n^2+3n+2} + n}.$$

A határérték tehát:

$$= \frac{3n+2}{\sqrt{n^2+3n+2} + n} = \frac{3 + {}^2\!/_n}{\sqrt{1 + {}^3\!/_n + {}^2\!/_{n^2}} + 1} \to \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

c) **Számláló és nevező együtt kezelésével**

$$\left(\frac{3n+2}{7+3n}\right)^{n+2} = \left(\frac{3n+7-5}{7+3n}\right)^{n+2} = \left[\left(1 + \frac{-5}{7+3n}\right)^{7+3n}\right]^{\frac{n+2}{7+3n}} \to \left[e^{-5}\right]^{\frac{1}{3}} = e^{-5/3}$$

Számláló és nevező külön kezelésével

$$\left(\frac{3n+2}{7+3n}\right)^{n+2} = \frac{\left(1 + \frac{2/3}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{7/3}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{3n+2}{3n+7}\right)^2 \to \frac{e^{2/3}}{e^{7/3}} \cdot 1 = e^{-5/3}$$

3. feladat (7 + 13 = 20 pont)

a) $\dfrac{3+2i}{i-4} = ?$ Az eredményt algebrai alakban adja meg!

b) $\sqrt[3]{-8i} = ?$ A gyököket trigonometrikus vagy exponenciális alakban adja meg, és ábrázolja is!

Megoldás.

a) Bővítsük a törtünket a nevező konjugáltjával, majd végezzük el a megfelelő egyszerűsítéseket:

$$\frac{3+2i}{i-4} = \frac{(3+2i)(-4-i)}{(-4+i)(-4-i)} = \frac{-12-3i-8i-2i^2}{(-4)^2+1^2} = -\frac{10}{17} - \frac{11}{17}i.$$

b) **Szöveges gondolatmenet**

A $z = -8i$ egy olyan komplex szám, amelynek valós része $\mathrm{Re}\{z\} = 0$, képzetes része pedig $\mathrm{Im}\{z\} = -8 < 0$.

Tehát a hossza $r = |z| = 8$, argumentuma pedig $\arg\{z\} = 270° = 3\pi/2$.

A harmadik gyökök hossza $\sqrt[3]{8} = 2$ lesz, az egyik gyök argumentuma pedig pont az eredeti szám argumentumának harmada, vagyis $\varphi_1 = 270°/3 = 90° = \pi/2$. A másik két gyököt az előbb meghatározott gyök $120° = 2\pi/3$, illetve $240° = 4\pi/3$-mal való elforgatásával kaphatjuk meg. Tehát a gyökök:

$$\sqrt[3]{-8i} = \begin{cases} 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = 2i, \\ 2 \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{6}}, \\ 2 \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{11\pi}{6}}. \end{cases}$$

Másik megoldás

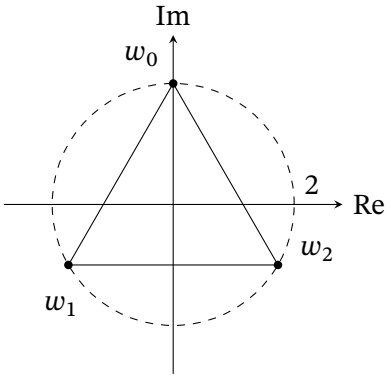
$-8i = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, így

$$w_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{3\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right), \quad k \in \{0;1;2\}.$$

A gyökök tehát:

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$
$$w_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right),$$
$$w_2 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

A gyökök egy origó középpontú, 2 sugarú körbe írt szabályos háromszög csúcsai:



4. feladat (8 + 22 = 30 pont)

$$f(x) = \frac{x \cdot \sin(x^2 - 9)}{x^2 + x - 6}$$

a) Határozza meg azt a legbővebb $D_f \subset \mathbb{R}$ halmazt, ahol a függvény értelmezhető! Mely pontokban folytonos a függvény, miért?

b) Határozza meg a függvény szakadási helyeit és a szakadások típusait! A szakadási pontokban adja meg a függvény bal és jobb oldali határértékét is!

Megoldás.

a) A nevező gyöktényezős alakban:

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2).$$

A nullával való osztást nem értelmezzük, ezért $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$.

A függvény D_f minden pontjában folytonos, mert folytonos függvények hányadosa.

b) Az $x = -3$ pontban:

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \underbrace{\frac{\sin(x^2-9)}{x^2-9}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x(x-3)}{x-2}}_{\to \frac{(-3)\cdot(-6)}{-5}} = -\frac{18}{5},$$

a bal és a jobb oldali határérték is $-\frac{18}{5}$, így itt megszüntethető (elsőfajú) szakadása van a függvénynek.

Az $x = 2$ pontban:

$$\lim_{x\to 2\pm 0} f(x) = \lim_{x\to 2\pm 0} \frac{\overbrace{x\sin(x^2-9)}^{\to 2\sin(-5)>0}}{\underbrace{(x+3)(x-2)}_{\to 0\pm 0}} = \pm\infty,$$

vagyis a bal oldali határérték $-\infty$, a jobb oldali $+\infty$, így itt másodfajú szakadása van a függvénynek.

5. feladat (5 + 5 = 10 pont, IMSC-seknek javasolt)

a) Adjon példát olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelynek a nulla kivételével minden helyen zérus a határértéke, de a nullában nem létezik a határértéke!

b) Igazolja, hogy nem létezik olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelynek a nullában 1 a határértéke, minden más pontban pedig nulla!

Megoldás.

a) Például legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = \frac{1}{n} \text{ valamilyen } n \in \mathbb{N}^+ \text{ esetén,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mivel az $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$ halmaznak egyetlen torlódási pontja a 0, ezért minden $a \neq 0$ pontnak létezik olyan kipontozott környezete, amelyben $f \equiv 0$. Így

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad (a \neq 0).$$

A nullában viszont a határérték nem létezik, hiszen

$$\frac{1}{n} \to 0, \qquad -\frac{1}{n} \to 0,$$

ugyanakkor

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \to 1, \qquad f\left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \to 0.$$

A Heine-féle átviteli elv alapján tehát

$$\lim_{x\to 0} f(x) \text{ nem létezik.}$$

b) **Bizonyítás indirekt módon**

Tegyük fel, hogy létezik ilyen függvény. Mivel

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1,$$

ezért $\varepsilon = \frac{1}{2}$-höz létezik $\delta > 0$, hogy

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}.$$

Tekintsük az $a = \frac{\delta}{2}$ pontot. Mivel $a \neq 0$, a feltevés szerint

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Ugyanakkor a a $(0, \delta)$ intervallum belső pontja, így létezik olyan környezete, amelyben minden x-re

$$\frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}.$$

Ezért a határértékekre vonatkozó egyenlőtlenségi tétel alapján

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq \frac{3}{2},$$

ami ellentmond annak, hogy $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Következésképpen: nem létezik ilyen függvény.