1. feladat (8 + 8 + 8 = 24 pont)

Legyen $w = -1 + \sqrt{3}i$.

a) Adja meg w exponenciális alakját!

b) Számolja ki w^{17} értékét, és az eredményt algebrai alakban adja meg!

c) Oldja meg a $z^2 - 1 = w$ egyenletet z-re! Az eredményt trigonometrikus alakban adja meg!

Megoldás.

a) A $w = -1 + \sqrt{3}i$ egy olyan komplex szám, amelynek valós része $\mathrm{Re}\{w\} = -1 < 0$, képzetes része pedig $\mathrm{Im}\{w\} = \sqrt{3} > 0$, tehát a második síknegyedben van.

A hossza

$$r = |w| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2,$$

az argumentumára pedig $\tan\varphi = -\sqrt{3}$, ami a második síknegyedben $\varphi = 120° = 2\pi/3$. Tehát

$$w = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}}.$$

b) A Moivre-képlet alapján a hosszat a hatványra emeljük, az argumentumot pedig megszorozzuk a kitevővel:

$$w^{17} = 2^{17} \cdot e^{i \cdot \frac{34\pi}{3}} = 2^{17} \cdot e^{i \cdot \left(10\pi + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2^{17} \cdot e^{i \cdot \frac{4\pi}{3}},$$

hiszen az argumentumból a 2π egész számú többszörösei elhagyhatók. Algebrai alakban:

$$w^{17} = 2^{17}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2^{17}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -65536 - 65536\sqrt{3}i.$$

c) **Szöveges gondolatmenet**

Rendezzük az egyenletet:

$$z^2 = w + 1 = \sqrt{3}i.$$

A $\sqrt{3}i$ hossza $\sqrt{3}$, argumentuma pedig $90° = \pi/2$. A négyzetgyökök hossza $\sqrt[4]{3}$ lesz, az egyik gyök argumentuma pedig az eredeti szám argumentumának fele, vagyis $45° = \pi/4$. A másik gyököt ennek $180° = \pi$-vel való elforgatásával kapjuk meg.

Másik megoldás

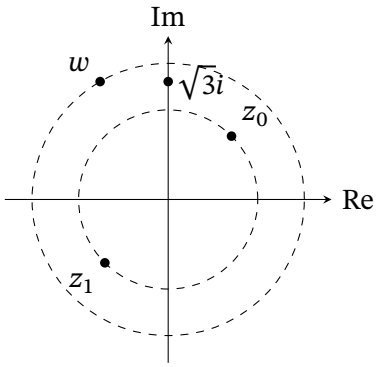
$\sqrt{3}i = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, így a gyökvonás képletével

$$z_k = \sqrt[4]{3}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right)\right), \quad k \in \{0;1\}.$$

A megoldások tehát:

$$z_0 = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$
$$z_1 = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

A számok a komplex számsíkon:



2. feladat (13 + 10 = 23 pont)

Határozza meg (a tanult tételek, szabályok alapján) a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2^{n+1}+3n^2}{5+6n}} = ?$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!+3^n}{n^2\sin^5(n)+n^n} = ?$

Megoldás.

a) **Szöveges gondolatmenet**

A gyökjel alatt a számlálóban a leggyorsabban növekvő tag a $2^{n+1} = 2\cdot 2^n$, hiszen $n^2 \ll 2^n$, a nevezőben pedig a $6n$. Mivel $\sqrt[n]{c} \to 1$ és $\sqrt[n]{n} \to 1$, a határérték a domináns exponenciális tag alapja, vagyis 2 lesz.

Becslés a rendőrelvvel

$n \geq 6$ esetén $3n^2 \leq 2^{n+1}$, továbbá $6n \leq 5+6n \leq 11n$. Becsüljük alulról és felülről a gyökjel alatti törtet:

$$\frac{2^{n+1}}{11n} \leq \frac{2^{n+1}+3n^2}{5+6n} \leq \frac{2\cdot 2^{n+1}}{6n}.$$

Mindhárom kifejezésből n-edik gyököt vonva:

$$2 \leftarrow \frac{2\cdot\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{11}\cdot\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}+3n^2}{5+6n}} \leq \frac{2\cdot\sqrt[n]{\frac{2}{3}}}{\sqrt[n]{n}} \to 2.$$

A rendőrelv alapján tehát a határérték 2.

b) **Szöveges gondolatmenet**

A számlálóban a leggyorsabban növekvő tag az $n!$, a nevezőben pedig az n^n, hiszen

$$n^2 \ll 3^n \ll n! \ll n^n,$$

és $\sin^5(n)$ korlátos. Mivel a nevező domináns tagja nagyságrendileg gyorsabban nő, a határérték 0 lesz.

Másik megoldás

Osszuk el a számlálót és a nevezőt is n^n-nel:

$$\frac{n!+3^n}{n^2\sin^5(n)+n^n} = \frac{\frac{n!}{n^n}+\frac{3^n}{n^n}}{\frac{n^2\sin^5(n)}{n^n}+1} \to \frac{0+0}{0+1} = 0,$$

hiszen

$$0 < \frac{n!}{n^n} \le \frac{1}{n} \to 0, \qquad \frac{3^n}{n^n} = \left(\frac{3}{n}\right)^n \to 0, \qquad \left|\frac{n^2 \sin^5(n)}{n^n}\right| \le \frac{n^2}{n^n} \to 0.$$

3. feladat (6 + 15 = 21 pont)

a) Mikor mondjuk, hogy $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$? Mondja ki a definíciót! ($x_0 \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}$)

b) A definíció alapján igazolja, hogy

$$\lim_{x\to 3} \frac{10}{2x-1} = 2. \qquad (\delta(\varepsilon) = ?)$$

Megoldás.

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x)-A| < \varepsilon$, ha $x \in D_f$ és $0 < |x-x_0| < \delta(\varepsilon)$.

b) Helyettesítsünk be a definícióban szereplő egyenlőtlenségbe:

$$\left|\frac{10}{2x-1} - 2\right| = \left|\frac{10-4x+2}{2x-1}\right| = \frac{4|x-3|}{|2x-1|}.$$

Becsüljük felül a törtünket. Ehhez a nevezőt kell alulról becsülni, ezért szorítkozzunk a 3 egy környezetére: ha $|x-3| < 1$, akkor $2 < x < 4$, így $|2x-1| > 3$. Ekkor:

$$\frac{4|x-3|}{|2x-1|} < \frac{4|x-3|}{3} < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad |x-3| < \frac{3\varepsilon}{4}.$$

A megoldás tehát:

$$\delta(\varepsilon) = \min\left\{1; \frac{3\varepsilon}{4}\right\}.$$

4. feladat (12 + 10 + 10 = 32 pont)

Határozza meg az alábbi függvényhatárértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos(x)} = ?$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\cosh(3-2x)}{e^{2x-1}} = ?$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} x \cdot \left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+3}\right) = ?$

Megoldás.

a) Behelyettesítéssel $\left(\frac{0}{0}\right)$ típusú határozatlan alakot kapunk.

Bővítés a konjugálttal

Bővítsük a törtet $(1+\cos x)$-szel, és használjuk fel, hogy $1-\cos^2 x = \sin^2 x$:

$$\frac{x^2}{1-\cos x} = \frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 (1+\cos x) \to 1^2 \cdot 2 = 2,$$

hiszen $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Másik megoldás

Az $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ azonosság alapján:

$$\frac{x^2}{1-\cos x} = \frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}} = 2\left(\frac{x/2}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \to 2\cdot 1^2 = 2.$$

b) Írjuk fel a cosh függvényt a definíciója szerint, $\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$:

$$\frac{\cosh(3-2x)}{e^{2x-1}} = \frac{e^{3-2x}+e^{2x-3}}{2e^{2x-1}} = \frac{1}{2}\left(e^{4-4x}+e^{-2}\right).$$

Ha $x\to-\infty$, akkor $4-4x\to\infty$, így $e^{4-4x}\to\infty$. A határérték tehát:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cosh(3-2x)}{e^{2x-1}} = \infty.$$

c) Behelyettesítéssel a zárójelben $(\infty-\infty)$ típusú határozatlan alakot kapunk. Alkalmazzuk a gyökös kifejezések racionalizálását, vagyis szorozzunk és osszunk a konjugált kifejezéssel:

$$x\cdot\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+3}\right) = x\cdot\frac{(x^2-1)-(x^2+3)}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+3}} = \frac{-4x}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+3}}.$$

Mivel $x\to-\infty$, ezért $x<0$, így $\sqrt{x^2}=|x|=-x$. Emeljünk ki a nevezőből:

$$\frac{-4x}{-x\left(\sqrt{1-1/x^2}+\sqrt{1+3/x^2}\right)} = \frac{4}{\sqrt{1-1/x^2}+\sqrt{1+3/x^2}} \to \frac{4}{1+1} = 2.$$

5. feladat (5 + 5 = 10 pont, IMSC-seknek javasolt)

a) Adjon példát olyan valós számsorozatra, amelynek a valós torlódási pontjai a pozitív egész számok!

b) Igazolja, hogy ha egy valós számsorozatnak minden pozitív egész szám torlódási pontja, akkor a $+\infty$ is torlódási pontja!

Megoldás.

a) Például legyen a sorozat

$$1;\ 1,2;\ 1,2,3;\ 1,2,3,4;\ \dots,$$

vagyis az m-edik blokk az $1,2,\dots,m$ számokból áll.

Minden k pozitív egész szám minden $m\geq k$ indexű blokkban szerepel, tehát végtelen sokszor fordul elő a sorozatban, így torlódási pont.

Más valós szám nem lehet torlódási pont, hiszen a sorozat elemei pozitív egészek: ha c nem pozitív egész, akkor c-nek van olyan környezete, amely egyetlen sorozatelemet sem tartalmaz.

b) **Bizonyítás**

A $+\infty$ akkor torlódási pont, ha minden K valós számhoz végtelen sok olyan n index létezik, amelyre $a_n > K$.

Legyen K tetszőleges, és válasszunk egy $k > K+1$ pozitív egész számot. Mivel k torlódási pontja a sorozatnak, ezért végtelen sok n-re

$$|a_n-k|<1 \quad\Longrightarrow\quad a_n > k-1 > K.$$

Következésképpen: a sorozatnak bármely K felett végtelen sok eleme van, vagyis a $+\infty$ is torlódási pontja.