1. feladat (8 + 8 + 8 = 24 pont)

Legyen $w = 1 - \sqrt{3}i$.

a) Adja meg w exponenciális alakját!

b) Számolja ki w^{19} értékét, és az eredményt algebrai alakban adja meg!

c) Oldja meg a $z^2 + 1 = w$ egyenletet z-re! Az eredményt trigonometrikus alakban adja meg!

Megoldás.

a) A $w = 1 - \sqrt{3}i$ egy olyan komplex szám, amelynek valós része $\mathrm{Re}\{w\} = 1 > 0$, képzetes része pedig $\mathrm{Im}\{w\} = -\sqrt{3} < 0$, tehát a negyedik síknegyedben van.

A hossza

$$r = |w| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2,$$

az argumentumára pedig $\tan\varphi = -\sqrt{3}$, ami a negyedik síknegyedben $\varphi = -60° = -\pi/3$. Tehát

$$w = 2 \cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}}.$$

b) A Moivre-képlet alapján a hosszat a hatványra emeljük, az argumentumot pedig megszorozzuk a kitevővel:

$$w^{19} = 2^{19} \cdot e^{-i\cdot\frac{19\pi}{3}} = 2^{19} \cdot e^{-i\cdot\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)} = 2^{19} \cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}},$$

hiszen az argumentumból a 2π egész számú többszörösei elhagyhatók. Algebrai alakban:

$$w^{19} = 2^{19}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2^{19}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 262144 - 262144\sqrt{3}i.$$

c) **Szöveges gondolatmenet**

Rendezzük az egyenletet:

$$z^2 = w - 1 = -\sqrt{3}i.$$

A $-\sqrt{3}i$ hossza $\sqrt{3}$, argumentuma pedig $270° = 3\pi/2$. A négyzetgyökök hossza $\sqrt[4]{3}$ lesz, az egyik gyök argumentuma pedig az eredeti szám argumentumának fele, vagyis $135° = 3\pi/4$. A másik gyököt ennek $180° = \pi$-vel való elforgatásával kapjuk meg.

Másik megoldás

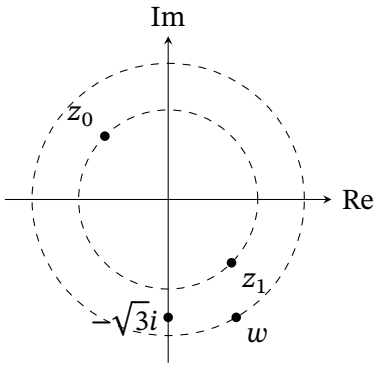
$-\sqrt{3}i = \sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, így a gyökvonás képletével

$$z_k = \sqrt[4]{3}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right)\right), \quad k \in \{0;1\}.$$

A megoldások tehát:

$$z_0 = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$
$$z_1 = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

A számok a komplex számsíkon:



2. feladat (13 + 10 = 23 pont)

Határozza meg (a tanult tételek, szabályok alapján) a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^{n+2}+2n^3}{2+7n}} = ?$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n+n^n}{n^3\cos^2(n)+n!} = ?$

Megoldás.

a) **Szöveges gondolatmenet**

A gyökjel alatt a számlálóban a leggyorsabban növekvő tag a $3^{n+2} = 9\cdot 3^n$, hiszen $n^3 \ll 3^n$, a nevezőben pedig a $7n$. Mivel $\sqrt[n]{c} \to 1$ és $\sqrt[n]{n} \to 1$, a határérték a domináns exponenciális tag alapja, vagyis 3 lesz.

Becslés a rendőrelvvel

$n \geq 1$ esetén $2n^3 \leq 3^{n+2}$, továbbá $7n \leq 2+7n \leq 9n$. Becsüljük alulról és felülről a gyökjel alatti törtet:

$$\frac{3^{n+2}}{9n} \leq \frac{3^{n+2}+2n^3}{2+7n} \leq \frac{2\cdot 3^{n+2}}{7n}.$$

Mindhárom kifejezésből n-edik gyököt vonva:

$$3 \leftarrow \frac{3}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{\frac{3^{n+2}+2n^3}{2+7n}} \leq \frac{3\cdot\sqrt[n]{\frac{18}{7}}}{\sqrt[n]{n}} \to 3.$$

A rendőrelv alapján tehát a határérték 3.

b) **Szöveges gondolatmenet**

A számlálóban a leggyorsabban növekvő tag az n^n, a nevezőben pedig az $n!$, hiszen

$$n^3 \ll 5^n \ll n! \ll n^n,$$

és $\cos^2(n)$ korlátos. Mivel a számláló domináns tagja nagyságrendileg gyorsabban nő, a határérték ∞ lesz.

Másik megoldás

Osszuk el a számlálót és a nevezőt is $n!$-sal:

$$\frac{5^n+n^n}{n^3\cos^2(n)+n!} = \frac{\frac{5^n}{n!}+\frac{n^n}{n!}}{\frac{n^3\cos^2(n)}{n!}+1} \to \infty,$$

hiszen

$$\frac{n^n}{n!} \geq n \to \infty, \qquad \frac{5^n}{n!} \to 0, \qquad 0 \leq \frac{n^3 \cos^2(n)}{n!} \leq \frac{n^3}{n!} \to 0.$$

3. feladat (6 + 15 = 21 pont)

a) Mikor mondjuk, hogy $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$? Mondja ki a definíciót! ($x_0 \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}$)

b) A definíció alapján igazolja, hogy

$$\lim_{x \to 2} \frac{15}{3x - 1} = 3. \qquad (\delta(\varepsilon) = ?)$$

Megoldás.

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x \in D_f$ és $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$.

b) Helyettesítsünk be a definícióban szereplő egyenlőtlenségbe:

$$\left|\frac{15}{3x-1} - 3\right| = \left|\frac{15 - 9x + 3}{3x - 1}\right| = \frac{9|x-2|}{|3x-1|}.$$

Becsüljük felül a törtünket. Ehhez a nevezőt kell alulról becsülni, ezért szorítkozzunk a 2 egy környezetére: ha $|x - 2| < 1$, akkor $1 < x < 3$, így $|3x - 1| > 2$. Ekkor:

$$\frac{9|x-2|}{|3x-1|} < \frac{9|x-2|}{2} < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad |x-2| < \frac{2\varepsilon}{9}.$$

A megoldás tehát:

$$\delta(\varepsilon) = \min\left\{1; \frac{2\varepsilon}{9}\right\}.$$

4. feladat (12 + 10 + 10 = 32 pont)

Határozza meg az alábbi függvényhatárértékeket!

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\cos(x) - 1} = ?$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sinh(2 + 3x)}{e^{3x-1}} = ?$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2}\right) = ?$

Megoldás.

a) Behelyettesítéssel $\left(\frac{0}{0}\right)$ típusú határozatlan alakot kapunk.

Bővítés a konjugálttal

Bővítsük a törtet $(1 + \cos x)$-szel, és használjuk fel, hogy $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$:

$$\frac{x^2}{\cos x - 1} = -\frac{x^2(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = -\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 (1 + \cos x) \to -\left(1^2 \cdot 2\right) = -2,$$

hiszen $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Másik megoldás

Az $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ azonosság alapján:

$$\frac{x^2}{\cos x - 1} = -\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}} = -2\left(\frac{x/2}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \to -2\cdot 1^2 = -2.$$

b) Írjuk fel a sinh függvényt a definíciója szerint, $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$:

$$\frac{\sinh(2+3x)}{e^{3x-1}} = \frac{e^{2+3x} - e^{-2-3x}}{2e^{3x-1}} = \frac{1}{2}\left(e^3 - e^{-1-6x}\right).$$

Ha $x \to -\infty$, akkor $-1-6x \to \infty$, így $e^{-1-6x} \to \infty$. A határérték tehát:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sinh(2+3x)}{e^{3x-1}} = -\infty.$$

c) Behelyettesítéssel a zárójelben $(\infty - \infty)$ típusú határozatlan alakot kapunk. Alkalmazzuk a gyökös kifejezések racionalizálását, vagyis szorozzunk és osszunk a konjugált kifejezéssel:

$$x\cdot\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2}\right) = x\cdot\frac{(x^2+1)-(x^2-2)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2}} = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2}}.$$

Mivel $x \to -\infty$, ezért $x < 0$, így $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Emeljünk ki a nevezőből:

$$\frac{3x}{-x\left(\sqrt{1+{}^1\!/_{x^2}} + \sqrt{1-{}^2\!/_{x^2}}\right)} = \frac{-3}{\sqrt{1+{}^1\!/_{x^2}} + \sqrt{1-{}^2\!/_{x^2}}} \to \frac{-3}{1+1} = -\frac{3}{2}.$$

5. feladat (5 + 5 = 10 pont, IMSC-seknek javasolt)

a) Adjon példát olyan valós számsorozatra, amelynek a valós torlódási pontjai a pozitív egész számok!

b) Igazolja, hogy ha egy valós számsorozatnak minden pozitív egész szám torlódási pontja, akkor a $+\infty$ is torlódási pontja!

Megoldás.

a) Például legyen a sorozat

$$1;\ 1,2;\ 1,2,3;\ 1,2,3,4;\ \dots,$$

vagyis az m-edik blokk az $1, 2, \dots, m$ számokból áll.

Minden k pozitív egész szám minden $m \geq k$ indexű blokkban szerepel, tehát végtelen sokszor fordul elő a sorozatban, így torlódási pont.

Más valós szám nem lehet torlódási pont, hiszen a sorozat elemei pozitív egészek: ha c nem pozitív egész, akkor c-nek van olyan környezete, amely egyetlen sorozatelemet sem tartalmaz.

b) **Bizonyítás**

A $+\infty$ akkor torlódási pont, ha minden K valós számhoz végtelen sok olyan n index létezik, amelyre $a_n > K$.

Legyen K tetszőleges, és válasszunk egy $k > K+1$ pozitív egész számot. Mivel k torlódási pontja a sorozatnak, ezért végtelen sok n-re

$$|a_n - k| < 1 \quad\Longrightarrow\quad a_n > k-1 > K.$$

Következésképpen: a sorozatnak bármely K felett végtelen sok eleme van, vagyis a $+\infty$ is torlódási pontja.