1. feladat (10 + 10 = 20 pont)

Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

a) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^2+2^n}{n+3}}$;

b) $b_n = \left(\dfrac{n-3}{n+2}\right)^{n-5}$

Megoldás.

a) **Szöveges gondolatmenet**

A gyökjel alatt a számlálóban a leggyorsabban növekvő tag a 2^n, hiszen $n^2 \ll 2^n$, a nevezőben pedig az n. Mivel $\sqrt[n]{c} \to 1$ és $\sqrt[n]{n} \to 1$, a határérték a domináns exponenciális tag alapja, vagyis 2 lesz.

Becslés a rendőrelvvel

$n \geq 4$ esetén $n^2 \leq 2^n$, továbbá $n \leq n+3 \leq 4n$. Becsüljük alulról és felülről a gyökjel alatti törtet:

$$\frac{2^n}{4n} \leq \frac{n^2+2^n}{n+3} \leq \frac{2\cdot 2^n}{n}.$$

Mindhárom kifejezésből n-edik gyököt vonva:

$$2 \leftarrow \frac{2}{\sqrt[n]{4}\cdot\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{\frac{n^2+2^n}{n+3}} \leq \frac{2\cdot\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}} \to 2.$$

A rendőrelv alapján tehát a határérték 2.

b) **Számláló és nevező együtt kezelésével**

$$\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n-5} = \left(\frac{n+2-5}{n+2}\right)^{n-5} = \left[\left(1+\frac{-5}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{n-5}{n+2}} \to \left[e^{-5}\right]^1 = e^{-5}$$

Számláló és nevező külön kezelésével

$$\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n-5} = \frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}\cdot\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{-5} \to \frac{e^{-3}}{e^2}\cdot 1 = e^{-5}$$

2. feladat (10 + 10 + 10 = 30 pont)

$$a_1 = 3; \qquad a_{n+1} = \sqrt{8a_n - 12}$$

a) Igazolja, hogy a fent megadott rekurzív sorozat elemeire $2 < a_n < 6$ teljesül!

b) Igazolja, hogy a sorozat monoton növő!

c) Igazolja, hogy létezik a sorozat határértéke, és adja is meg!

Megoldás.

a) **Bizonyítás teljes indukcióval**

$n = 1$ esetén $2 < a_1 = 3 < 6$ teljesül.

Tegyük fel, hogy valamilyen n-re $2 < a_n < 6$. Ekkor

$$4 < 8a_n - 12 < 36 \quad \Longrightarrow \quad 2 < \sqrt{8a_n - 12} = a_{n+1} < 6.$$

Következésképpen: minden n-re $2 < a_n < 6$.

b) Mivel $a_n > 0$, a gyökvonás miatt elég a négyzetekre igazolni az egyenlőtlenséget:

$$a_{n+1} > a_n \quad \Longleftrightarrow \quad 8a_n - 12 > a_n^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (a_n - 2)(a_n - 6) < 0,$$

ami az a) rész alapján teljesül, hiszen az első tényező pozitív, a második negatív. A sorozat tehát (szigorúan) monoton növő.

c) A sorozat monoton növő és felülről korlátos, így konvergens; legyen $A = \lim a_n$. A rekurzióban határértéket véve (a gyökfüggvény folytonossága miatt):

$$A = \sqrt{8A - 12} \quad \Longrightarrow \quad A^2 - 8A + 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad A \in \{2; 6\}.$$

Mivel a sorozat növő, $A \geq a_1 = 3$. A határérték tehát:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 6.$$

3. feladat (8 + 12 = 20 pont)

a) $\dfrac{3+5i}{2+6i} = ?$ Az eredményt algebrai alakban adja meg!

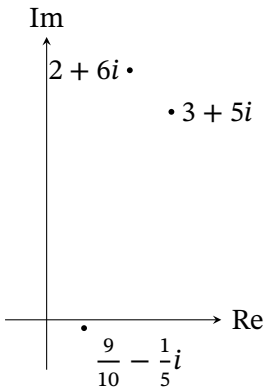
b) $\sqrt[3]{8i} = ?$ A gyököket trigonometrikus vagy exponenciális alakban adja meg, és ábrázolja is!

Megoldás.

a) Bővítsük a törtünket a nevező konjugáltjával, majd végezzük el a megfelelő egyszerűsítéseket:

$$\frac{3+5i}{2+6i} = \frac{(3+5i)(2-6i)}{(2+6i)(2-6i)} = \frac{6-18i+10i-30i^2}{2^2+6^2} = \frac{36-8i}{40} = \frac{9}{10} - \frac{1}{5}i.$$

A számok a komplex számsíkon:



b) **Szöveges gondolatmenet**

A $z = 8i$ egy olyan komplex szám, amelynek valós része $\mathrm{Re}\{z\} = 0$, képzetes része pedig $\mathrm{Im}\{z\} = 8 > 0$.

Tehát a hossza $r = |z| = 8$, argumentuma pedig $\arg\{z\} = 90° = \pi/2$.

A harmadik gyökök hossza $\sqrt[3]{8} = 2$ lesz, az egyik gyök argumentuma pedig pont az eredeti szám argumentumának harmada, vagyis $\varphi_1 = 90°/3 = 30° = \pi/6$. A másik két gyököt az előbb meghatározott gyök $120° = 2\pi/3$, illetve $240° = 4\pi/3$-mal való elforgatásával kaphatjuk meg. Tehát a gyökök:

$$\sqrt[3]{8i} = \begin{cases} 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}, \\ 2 \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}, \\ 2 \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}} = -2i. \end{cases}$$

Másik megoldás

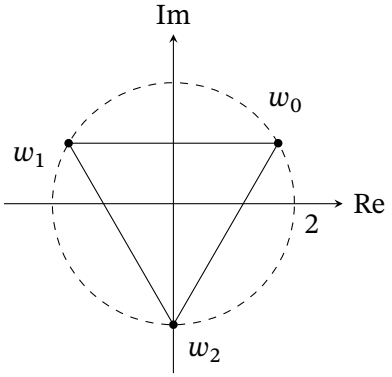
$8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, így

$$w_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right), \quad k \in \{0;1;2\}.$$

A gyökök tehát:

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$
$$w_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right),$$
$$w_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i.$$

A gyökök egy origó középpontú, 2 sugarú körbe írt szabályos háromszög csúcsai:



4. feladat (14 + 8 + 8 = 30 pont)

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$$

a) A megfelelő definícióval igazolja, hogy $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = ?$ (Számolási szabályokkal.)

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = ?$ (Számolási szabályokkal.)

Megoldás.

A számláló és a nevező gyöktényezős alakban:

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3), \qquad x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2),$$

így $x \notin \{-2; 3\}$ esetén

$$f(x) = \frac{x+3}{x+2}.$$

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x \in D_f$ és $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$.

Helyettesítsünk be a definícióban szereplő egyenlőtlenségbe:

$$\left|\frac{x+3}{x+2} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2x+6-3x-6}{2(x+2)}\right| = \frac{|x|}{2|x+2|}.$$

Becsüljük felül a törtünket. Ehhez a nevezőt kell alulról becsülni, ezért szorítkozzunk a 0 egy környezetére: ha $|x| < 1$, akkor $1 < x + 2 < 3$, így $|x + 2| > 1$. Ekkor:

$$\frac{|x|}{2|x+2|} < \frac{|x|}{2} < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad |x| < 2\varepsilon.$$

A megoldás tehát:

$$\delta(\varepsilon) = \min\{1; 2\varepsilon\}.$$

b) Az egyszerűsített alak az $x = -3$ pontban folytonos, így behelyettesíthetünk:

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x+2} = \frac{0}{-1} = 0.$$

c) Osszuk el a számlálót és a nevezőt is x-szel:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + 3/x}{1 + 2/x} = 1.$$