A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények kapcsolata

Analízis A1 – segédanyag

Sándor Tibor

Az előző két jegyzetben a trigonometrikus és a hiperbolikus függvények feltűnően hasonlóan viselkedtek: az egységkör és az egységhiperbola, a két Pitagorasz-tétel, a párosság és a páratlanság mind párban jártak. Ez nem véletlen. A komplex számok körében a két függvénycsalád lényegében ugyanaz, csak a képzetes tengely mentén elforgatva:

$$\cos x = \cosh(ix), \qquad i \sin x = \sinh(ix).$$

Ebben a jegyzetben ezt az összefüggést mutatjuk meg, és megnézzük, mire jó.

1. Az Euler-formula

A komplex számok exponenciális alakjából ismert az *Euler-formula*: minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Mivel a koszinusz páros, a szinusz pedig páratlan, x helyére $-x$-et írva

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

A két egyenlőséget összeadva, illetve kivonva a koszinusz és a szinusz az exponenciális függvénnyel is kifejezhető (1. ábra):

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Vessük össze ezt a hiperbolikus függvények exponenciális alakjával:

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

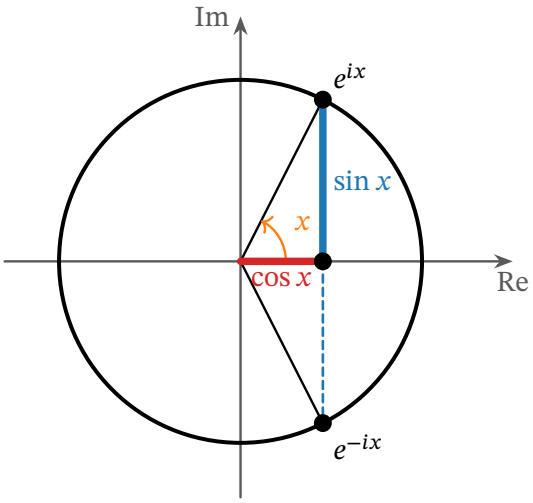
A különbség csak annyi, hogy a trigonometrikus képletekben e^x helyett e^{ix} áll, a szinusz nevezőjében pedig 2 helyett $2i$.

2. Kiterjesztés a komplex számokra

A komplex kitevőjű hatványt a komplex számok exponenciális alakja már értelmezi: ha $z = a + bi$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

$$e^{z} = e^{a}(\cos b + i \sin b).$$

Az előző fejezet képletei így tetszőleges komplex számra is értelmesek, és ezekkel terjesztjük ki a függvényeket.



1. ábra. Az e^{ix} és az e^{-ix} pont egymás tükörképe a valós tengelyre. Összegük valós: $2\cos x$ (a piros szakasz $\cos x$), különbségük tisztán képzetes: $2i \sin x$ (a kék szakasz $\sin x$).

1. Definíció. Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cosh z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},$$

továbbá $\tan z := \sin z / \cos z$ és $\tanh z := \sinh z / \cosh z$, ahol a nevező nem nulla.

Valós z esetén ezek a megszokott függvények: a trigonometrikusak az Euler-formula, a hiperbolikusak az exponenciális alakjuk miatt.

3. A kapcsolat

2. Tétel. Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\cosh(iz) = \cos z, \qquad \sinh(iz) = i \sin z,$$

$$\cos(iz) = \cosh z, \qquad \sin(iz) = i \sinh z,$$

és ahol a nevező nem nulla,

$$\tanh(iz) = i \tan z, \qquad \tan(iz) = i \tanh z.$$

Bizonyítás. Helyettesítsünk be a definíciókba. Az első kettő:

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \qquad \sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \sin z.$$

A második kettőnél $i \cdot iz = -z$:

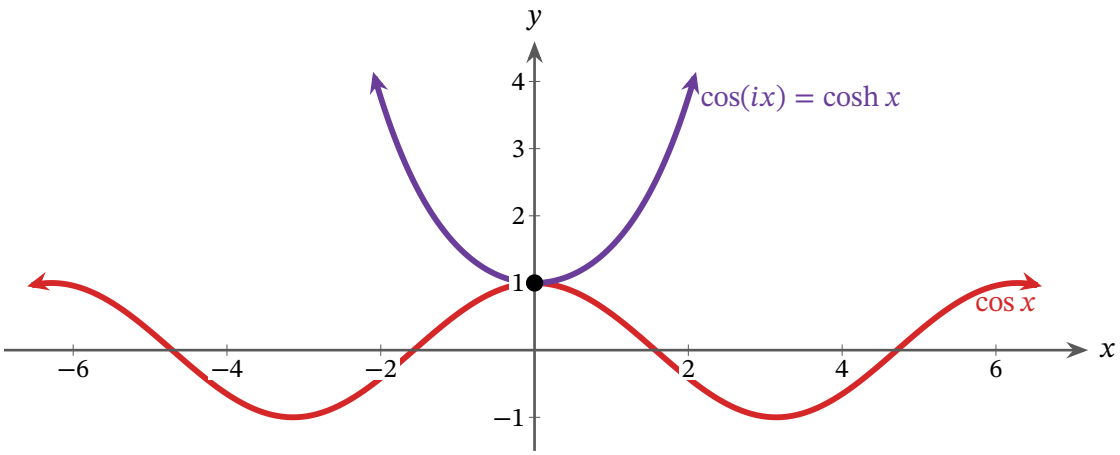
$$\cos(iz) = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh z, \qquad \sin(iz) = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i \cdot \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = i \sinh z,$$

ahol felhasználtuk, hogy $1/i = -i$. A tangensekre ezekből

$$\tanh(iz) = \frac{\sinh(iz)}{\cosh(iz)} = \frac{i \sin z}{\cos z} = i \tan z, \qquad \tan(iz) = \frac{\sin(iz)}{\cos(iz)} = \frac{i \sinh z}{\cosh z} = i \tanh z.$$

□

Szavakban: a koszinusz a képzetes tengely mentén koszinusz hiperbolikusz, a szinusz pedig (i-szeres) szinusz hiperbolikusz. Valós y esetén például $\cos(iy) = \cosh y$, ami $y \to \pm\infty$ esetén végtelenhez tart (2. ábra).



2. ábra. A valós tengely mentén a koszinusz -1 és 1 között hullámzik (piros), a képzetes tengely mentén viszont $\cos(ix) = \cosh x$ (lila), ami nem korlátos. Mindkettő páros, és értéke a 0-ban 1.

Megjegyzés. Valós számokra $|\cos x| \le 1$ és $|\sin x| \le 1$, a komplex síkon azonban ez már nem igaz: például $\cos i = \cosh 1 \approx 1{,}54$, és $|\sin(iy)| = |\sinh y|$ tetszőlegesen nagy lehet.

4. Azonosságok átvitele

A kapcsolat haszna, hogy a trigonometrikus azonosságokból számolás nélkül kapunk hiperbolikusakat. A trigonometrikus addíciós tételek, például

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \qquad \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w,$$

az exponenciális alakból ugyanúgy beláthatók komplex z és w esetén is, mint valós számokra.

3. Példa. Vezessük le a trigonometrikus Pitagorasz-tételből a hiperbolikusat!

Írjunk x helyére ix-et a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ azonosságba:

$$1 = \cos^2(ix) + \sin^2(ix) = \cosh^2 x + (i \sinh x)^2 = \cosh^2 x - \sinh^2 x.$$

4. Példa. Vezessük le a hiperbolikus addíciós tételeket!

Írjunk x helyére ix-et, y helyére iy-t:

$$\begin{aligned}\cosh(x+y) = \cos(ix+iy) &= \cos(ix)\cos(iy) - \sin(ix)\sin(iy)\\ &= \cosh x \cosh y - (i \sinh x)(i \sinh y),\end{aligned}$$

vagyis

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

Hasonlóan, $\sinh(x+y) = -i \sin(ix+iy)$ miatt

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= -i\big(\sin(ix)\cos(iy) + \cos(ix)\sin(iy)\big)\\ &= -i\big(i \sinh x \cosh y + i \cosh x \sinh y\big),\end{aligned}$$

vagyis

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

A példákban mindig ugyanaz történt: a cos helyére cosh, a sin helyére sinh került, és ahol két szinusz szorzata állt, ott $i \cdot i = -1$ miatt előjelet váltott a tag. Ez az *Osborn-szabály*:

Trigonometrikus	Hiperbolikus
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$	$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$	$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

A $\tan^2 x = \sin^2 x / \cos^2 x$ is két szinusz szorzatát tartalmazza, ezért vált előjelet a tangenses azonosság.

5. Valós és képzetes rész

Az addíciós tételekből a komplex szinusz és koszinusz valós és képzetes része is kiszámolható.

5. Tétel. Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \qquad \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

Bizonyítás. Az addíciós tételekből, $\cos(iy) = \cosh y$ és $\sin(iy) = i \sinh y$ felhasználásával:

$$\sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

□

6. Példa. Oldjuk meg a $\cos z = 2$ egyenletet a komplex számok körében!

Legyen $z = x + iy$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Az előző tétel szerint

$$\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = 2,$$

vagyis a valós és a képzetes részeket összevetve

$$\cos x \cosh y = 2 \qquad \text{és} \qquad \sin x \sinh y = 0.$$

Ha $\sinh y = 0$, akkor $y = 0$, és $\cos x = 2$ lehetetlen. Így $\sin x = 0$, azaz $x = k\pi$, és ekkor $\cos x = \pm 1$. Mivel $\cosh y \geq 1 > 0$, csak $\cos x = 1$ jöhet szóba, vagyis $x = 2k\pi$ és $\cosh y = 2$. Ennek megoldásai $y = \pm \operatorname{arcosh} 2 = \pm \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$. A megoldás tehát:

$$z = 2k\pi \pm i \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

7. Példa. Hol nulla a komplex szinusz?

Legyen $z = x + iy$. A $\sin z = 0$ egyenlet valós és képzetes része:

$$\sin x \cosh y = 0 \qquad \text{és} \qquad \cos x \sinh y = 0.$$

Mivel $\cosh y \geq 1$, az elsőből $\sin x = 0$, azaz $x = k\pi$. Ekkor $\cos x = \pm 1$, így a másodikból $\sinh y = 0$, azaz $y = 0$. A komplex szinusznak tehát nincs új zérushelye: ezek pontosan a valós $z = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) számok.

6. A komplex függvények ábrázolása

Egy $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény grafikonja négydimenziós volna: két dimenzió kell a változónak és kettő az értéknek, így közvetlenül nem rajzolható le. Szemléletes megoldás, ha a komplex sík minden z pontját az $|f(z)|$ abszolút érték szerint színezzük, vagy $|f(z)|$-t felületként a sík fölé rajzoljuk. Az abszolút értékek az előző fejezet tételéből kiszámolhatók.

8. Tétel. Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y, \qquad |\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y,$$

$$|\sinh(x+iy)|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y, \qquad |\cosh(x+iy)|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y,$$

és ahol a nevező nem nulla,

$$|\tan(x+iy)|^2 = \frac{\sin^2 x + \sinh^2 y}{\cos^2 x + \sinh^2 y}, \qquad |\tanh(x+iy)|^2 = \frac{\sinh^2 x + \sin^2 y}{\sinh^2 x + \cos^2 y}.$$

Bizonyítás. Az előző tétel szerint a valós és a képzetes rész négyzetösszege

$$\begin{aligned} |\sin(x+iy)|^2 &= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y = \sin^2 x \left(1 + \sinh^2 y\right) + \cos^2 x \sinh^2 y \\ &= \sin^2 x + \sinh^2 y, \end{aligned}$$

és ugyanígy $|\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$. A hiperbolikus függvényekre $\sinh z = -i \sin(iz)$ és $\cosh z = \cos(iz)$, ahol $i(x+iy) = -y + ix$, így

$$|\sinh(x+iy)| = |\sin(-y+ix)|, \qquad |\cosh(x+iy)| = |\cos(-y+ix)|,$$

és ezekre az előző két képlet adja az állítást. A tangensek abszolút értéke pedig a számláló és a nevező abszolút értékének hányadosa. □

Az abszolút érték mellett a valós és a képzetes rész is felületként ábrázolható (4–6. ábra). A trigonometrikus függvényekét az előző fejezet tétele adja, a hiperbolikusakét pedig ugyanígy az addíciós tételek:

$$\sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y, \qquad \cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y.$$

A tangensekre a tört bővítésével (a számlálót és a nevezőt is $\cos(x-iy)$-vel, illetve $\cosh(x-iy)$-vel szorozva)

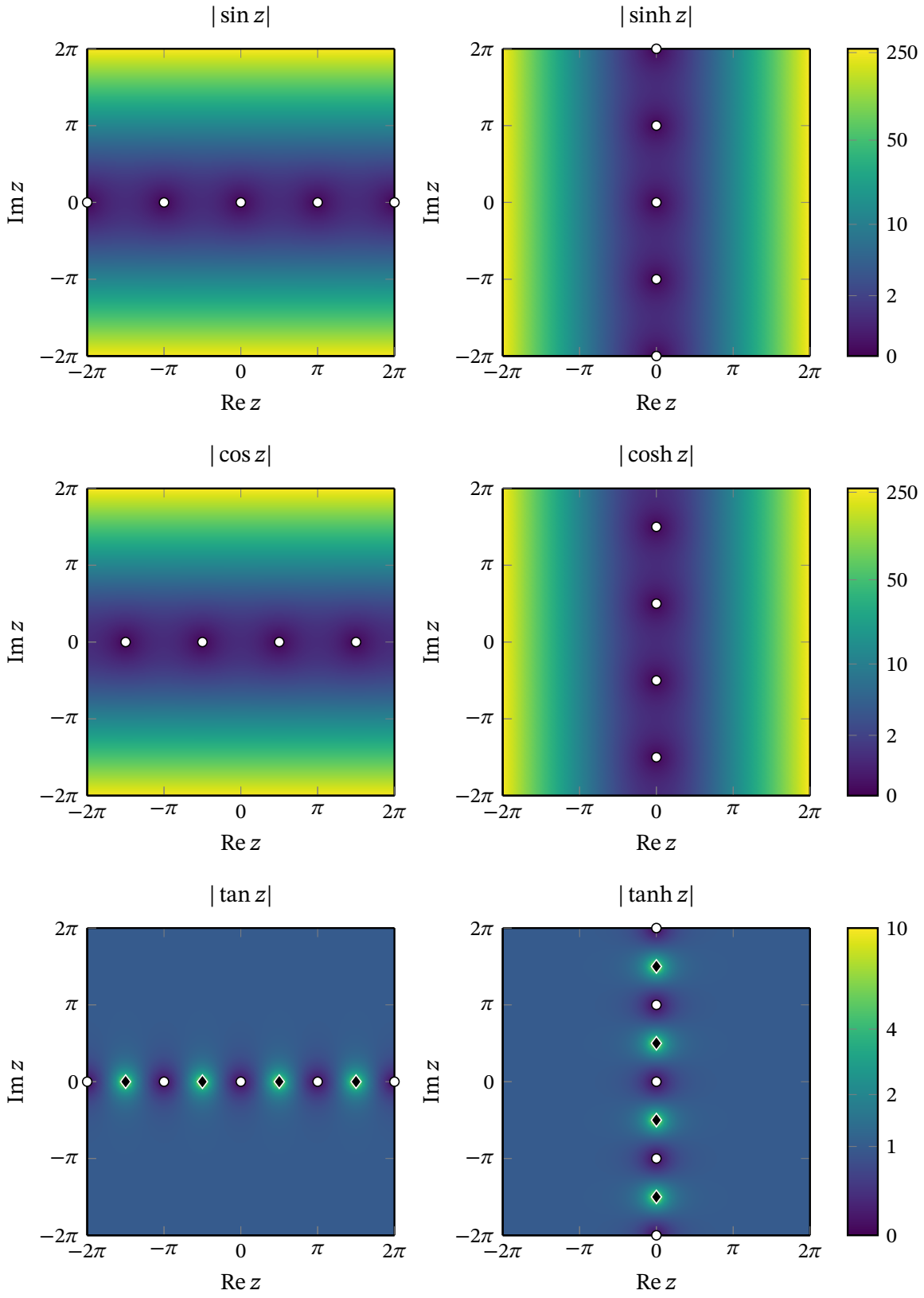
$$\tan(x+iy) = \frac{\sin 2x + i \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}, \qquad \tanh(x+iy) = \frac{\sinh 2x + i \sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}.$$

Az ábrák (3–6. ábra) és a tétel képletei alapján a hat függvény összevetése:

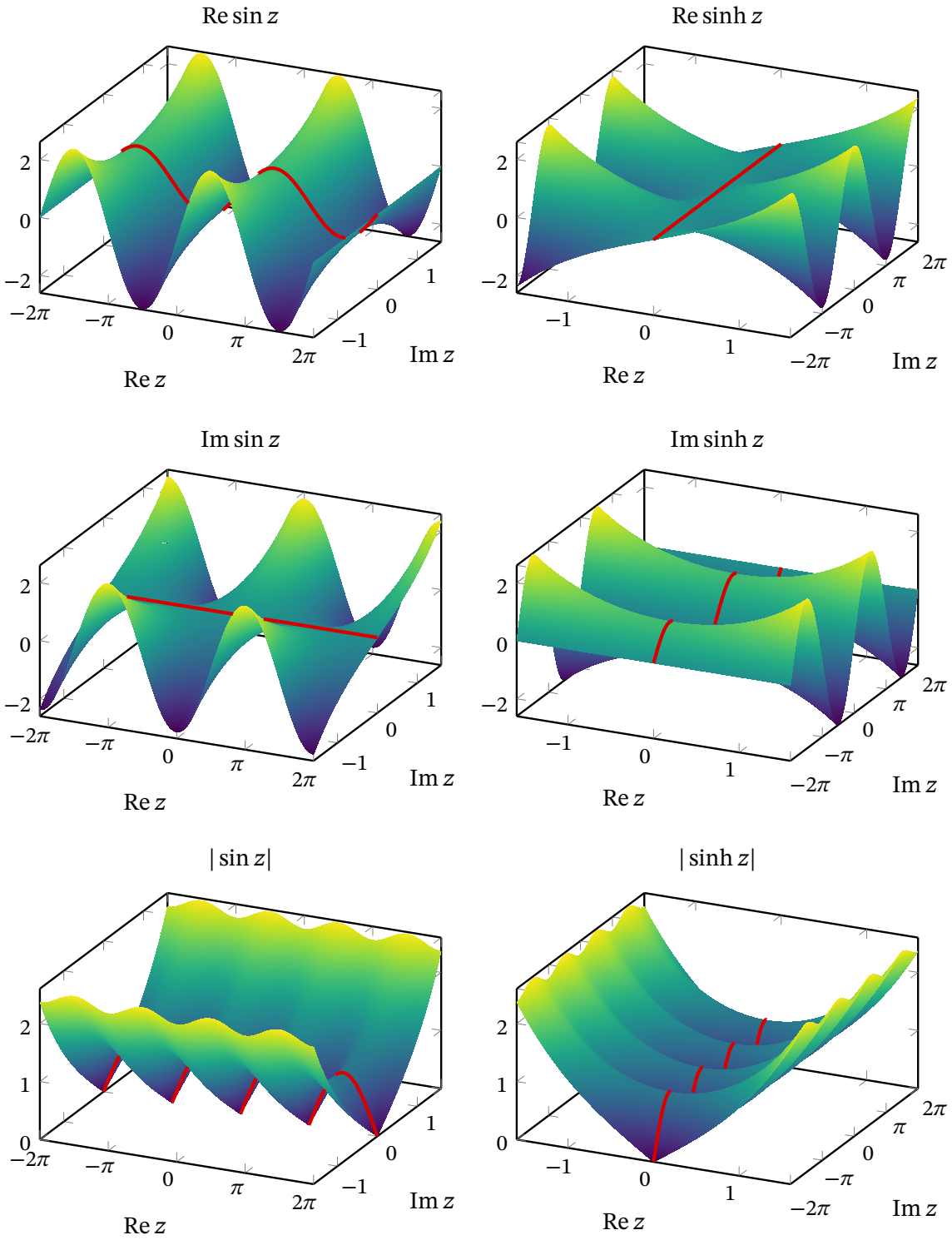
- *Zérushelyek.* A $\sin z$ zérushelyei a $k\pi$, a $\cos z$-éi a $\pi/2 + k\pi$ valós számok; a $\sinh z$ zérushelyei a $k\pi i$, a $\cosh z$-éi a $(\pi/2+k\pi)i$ tisztán képzetes számok ($k \in \mathbb{Z}$). A tangensnek a szinusszal közösek a zérushelyei, és a koszinusz zérushelyein pólusa van; a tangens hiperbolikusz ugyanígy a szinusz és a koszinusz hiperbolikuszból.
- *Periodicitás.* A szinusz és a koszinusz a valós tengely irányában periodikus: $\sin(z+2\pi) = \sin z$. A hiperbolikus függvények a képzetes irányban: $\sinh(z + 2\pi i) = \sinh z$, mert $e^{z+2\pi i} = e^z$. A tangensek periódusa ennek fele: π, illetve πi.
- *Növekedés.* A szinusz és a koszinusz a valós tengely mentén korlátos, a képzetes irányban viszont $\frac{1}{2}e^{|y|}$-hez hasonlóan nő; a hiperbolikus függvényeknél éppen fordítva. A tangensek ezzel szemben korlátosak a pólusaiktól távol: a tétel képlete szerint $|\tan(x + iy)| \to 1$, ha $|y| \to \infty$, mert a számláló és a nevező is $\sinh^2 y$-hoz hasonlóan nő; a $|\tanh(x + iy)|$ ugyanígy 1-hez tart, ha $|x| \to \infty$.
- *Elforgatás.* Mivel $|\sinh z| = |\sin(iz)|$, $|\cosh z| = |\cos(iz)|$ és $|\tanh z| = |\tan(iz)|$, és az i-vel való szorzás 90°-os elforgatás, a hiperbolikus függvények képe a trigonometrikusaké 90°-kal elforgatva.
- *Eltolás.* Ahogy a valós számokon, a koszinusz a szinusz eltoltja ($\cos z = \sin(z + \pi/2)$), és ugyanígy a koszinusz hiperbolikusz a szinusz hiperbolikuszé a képzetes irányban.

7. Összefoglalás

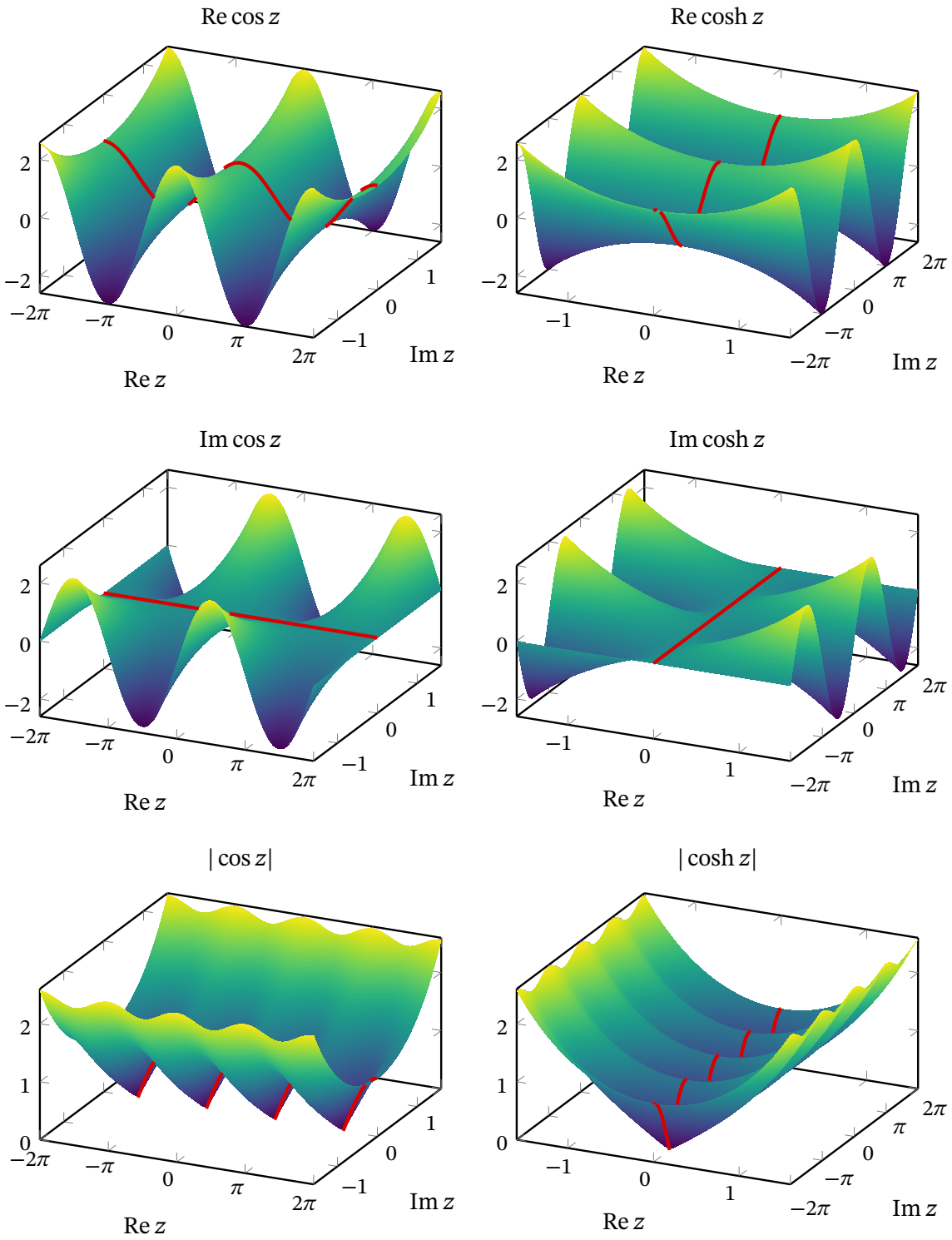
	Trigonometrikus	Hiperbolikus
Görbe	$x^2 + y^2 = 1$	$x^2 - y^2 = 1$
Exponenciális alak	$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$	$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$
	$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$	$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
Pitagorasz-tétel	$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$	$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
Kapcsolat	$\cos z = \cosh(iz)$	$\cosh z = \cos(iz)$
	$i \sin z = \sinh(iz)$	$i \sinh z = \sin(iz)$



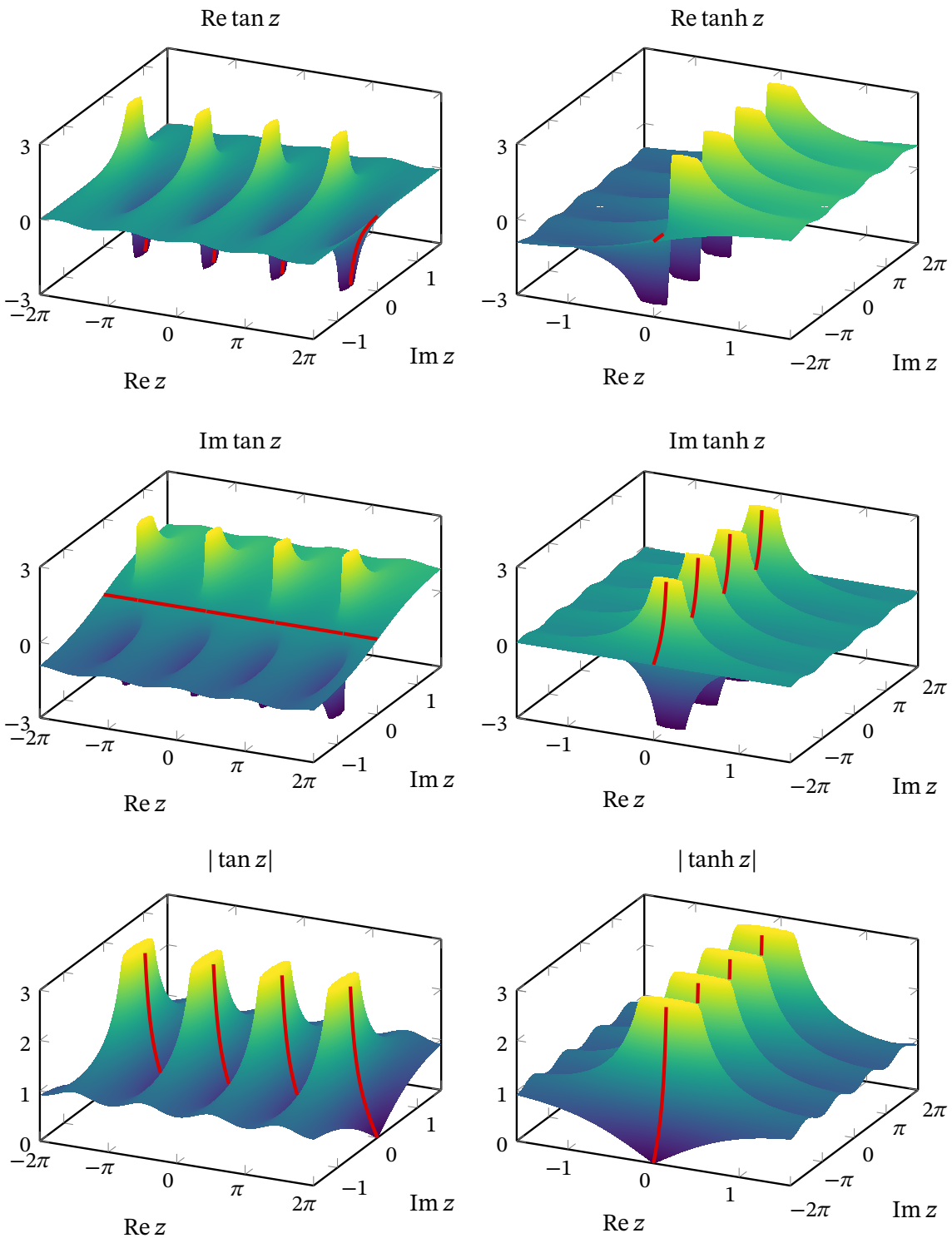
3. ábra. A hat függvény abszolút értéke a komplex síkon, logaritmikus színskálán (sötét: kicsi, világos: nagy). A karikák a zérushelyek, a rombuszok a tangensek pólusai (ahol a nevező nulla). Az alsó sor színskálája finomabb, mert a tangensek a pólusaiktól távol 1 közelében maradnak. A hiperbolikus függvények képe (jobbra) a trigonometrikusaké (balra) 90°-kal elforgatva.



4. ábra. A $\sin z$ (balra) és a $\sinh z$ (jobbra) valós része, képzetes része és abszolút értéke. A piros görbe a felület metszete a valós, illetve a képzetes tengely fölött; ahol a felület eltakarja, ott nem látszik. A valós tengelyen $\sin x$ valós, a képzetes tengelyen $\sinh(iy) = i \sin y$ tisztán képzetes.



5. ábra. A $\cos z$ (balra) és a $\cosh z$ (jobbra) valós része, képzetes része és abszolút értéke. A piros görbe a felület metszete a valós, illetve a képzetes tengely fölött; ahol a felület eltakarja, ott nem látszik. Mindkét metszet valós: $\cos x$, illetve $\cosh(iy) = \cos y$.



6. ábra. A $\tan z$ (balra) és a $\tanh z$ (jobbra) valós része, képzetes része és abszolút értéke, a pólusok közelében ± 3-nál levágva. A piros görbe a felület metszete a valós, illetve a képzetes tengely fölött; ahol a felület eltakarja, ott nem látszik. A valós tengelyen $\tan x$ valós, a képzetes tengelyen $\tanh(iy) = i \tan y$ tisztán képzetes.