Hiperbolikus függvények és inverzeik

Analízis A1 – segédanyag

Sándor Tibor

A hiperbolikus függvények sok tekintetben a trigonometrikus függvények párjai: ami ott az egységkör, az itt az egységhiperbola. Ebben a jegyzetben az egységhiperbolából építjük fel a szinusz, a koszinusz és a tangens hiperbolikuszt, megmutatjuk, hogy az exponenciális függvénnyel is kifejezhetők, majd invertáljuk őket. A trigonometrikus függvényekkel ellentétben kettő közülük eleve kölcsönösen egyértelmű, így csak a koszinusz hiperbolikuszt kell leszűkíteni.

1. Az egységhiperbola

Az egységkör $x^2 + y^2 = 1$ egyenletének párja az *egységhiperbola*:

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Két ága van, egy jobb oldali ($x \geq 1$) és egy bal oldali ($x \leq -1$), az $y = x$ és az $y = -x$ egyenes pedig az aszimptotái. A továbbiakban csak a jobb oldali ággal dolgozunk.

Az egységkörön a φ szöget kétféleképpen is mérhetjük: φ a kimetszett ív hossza, és $\varphi/2$ a hozzá tartozó körcikk területe. A hiperbolán az ívhossz nem vezet szép függvényekhez, a terület viszont igen, ezért ott a szektor területével mérünk.

1. Definíció. Induljunk el az $(1, 0)$ pontból, és haladjunk az egységhiperbola jobb oldali ágán; ha $t > 0$, felfelé, ha $t < 0$, lefelé, egészen addig, amíg az O origó, az $(1, 0)$ pont és az aktuális pont által határolt *hiperbolikus szektor* területe $|t|/2$ nem lesz. Jelölje P_t azt a pontot, ahová érkezünk; $P_0 = (1, 0)$. Ekkor

$$\cosh t := P_t \text{ első koordinátája}, \qquad \sinh t := P_t \text{ második koordinátája},$$

és

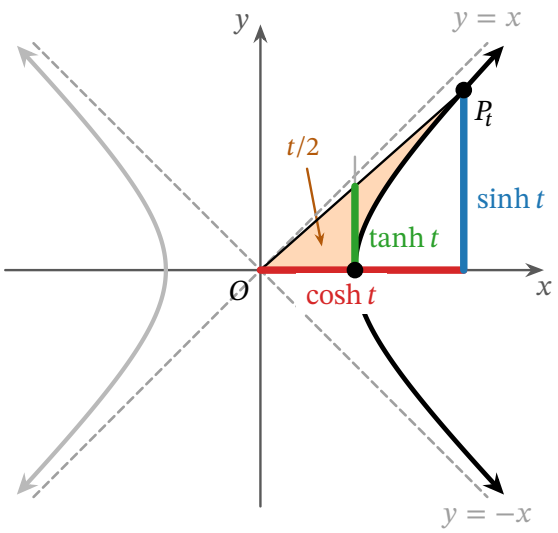
$$\tanh t := \frac{\sinh t}{\cosh t}.$$

Kiolvasva: koszinusz hiperbolikusz, szinusz hiperbolikusz és tangens hiperbolikusz.

A tangens hiperbolikusznak is van szemléletes jelentése, akárcsak a tangensnek az egységkörön: az OP_t egyenes az $x = 1$ egyenest az $(1, \tanh t)$ pontban metszi (1. ábra). Mivel ez az egyenes az $y = x$ aszimptotánál laposabb, $|\tanh t| < 1$.

1.1. Alapvető összefüggések

A definícióból, a hiperbola tulajdonságai alapján:



1. ábra. Az egységhiperbola ($x^2 - y^2 = 1$). A narancssárga hiperbolikus szektor területe $t/2$; a piros szakasz $\cosh t$, a kék $\sinh t$, a zöld $\tanh t$. A bal oldali ág halvány.

- P_t rajta van az egységhiperbolán, így koordinátái kielégítik az egyenletét:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

  Ez a trigonometrikus Pitagorasz-tétel ($\cos^2 t + \sin^2 t = 1$) párja, egyetlen előjelnyi különbséggel.

- P_t a jobb oldali ágon van, így $\cosh t \geq 1$; továbbá $\cosh 0 = 1$ és $\sinh 0 = 0$.

- Az x tengelyre tükrözve a t-hez tartozó szektorból a $-t$-hez tartozó lesz, így P_{-t} a P_t tükörképe: $\cosh(-t) = \cosh t$ és $\sinh(-t) = -\sinh t$. A koszinusz hiperbolikusz tehát páros, a szinusz és a tangens hiperbolikusz páratlan.

2. Az exponenciális alak

A hiperbolikus függvények, a trigonometrikusakkal ellentétben, az exponenciális függvénnyel is egyszerűen kifejezhetők.

2. Tétel. Minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad \tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}.$$

Bizonyítás. Ehhez integrálszámítás kell; aki még nem tanulta, a tételt egyelőre bizonyítás nélkül is elfogadhatja.

Legyen $t > 0$ és $P_t = (x, y)$, ekkor $y = \sqrt{x^2 - 1} > 0$. A hiperbolikus szektor az O, a $C = (x, 0)$ és a P_t pont alkotta háromszög, amelyből elhagyjuk a hiperbola alatti tartományt az 1 és az x között (2. ábra). A háromszög területe $xy/2$, és

$$\int_1^x \sqrt{u^2 - 1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u\sqrt{u^2-1} - \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right)}{2}\right]_1^x = \frac{xy - \ln(x+y)}{2},$$

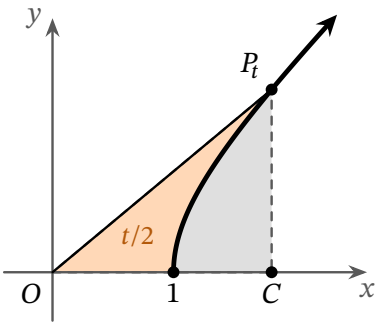
amit a primitív függvény deriválásával ellenőrizhetünk. A szektor területe tehát

$$\frac{t}{2} = \frac{xy}{2} - \frac{xy - \ln(x+y)}{2} = \frac{\ln(x+y)}{2}, \qquad \text{vagyis} \qquad x + y = e^t.$$

Mivel $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = 1$, ebből $x - y = e^{-t}$. A két egyenlőséget összeadva, illetve kivonva

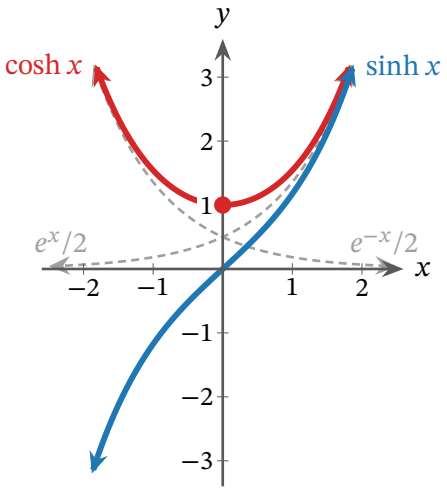
$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Ha $t < 0$, akkor P_t a P_{-t} tükörképe az x tengelyre, és a képletek a páros, illetve páratlan alak miatt ekkor is teljesülnek; $t = 0$ esetén pedig mindkét oldalon $P_0 = (1, 0)$ áll. A tangens hiperbolikusz alakja a hányadosból adódik. □



2. ábra. A hiperbolikus szektor (narancssárga) az OCP_t háromszög, amelyből elhagyjuk a hiperbola alatti szürke tartományt.

A koszinusz hiperbolikusz tehát az $e^t/2$ és az $e^{-t}/2$ függvény összege, a szinusz hiperbolikusz a különbségük, és $\cosh t + \sinh t = e^t$ (3. ábra). Ha t nagy, e^{-t} elhanyagolható, így mindkettő közel van $e^t/2$-höz. A továbbiakban a függvények változóját a megszokott módon x-szel jelöljük.

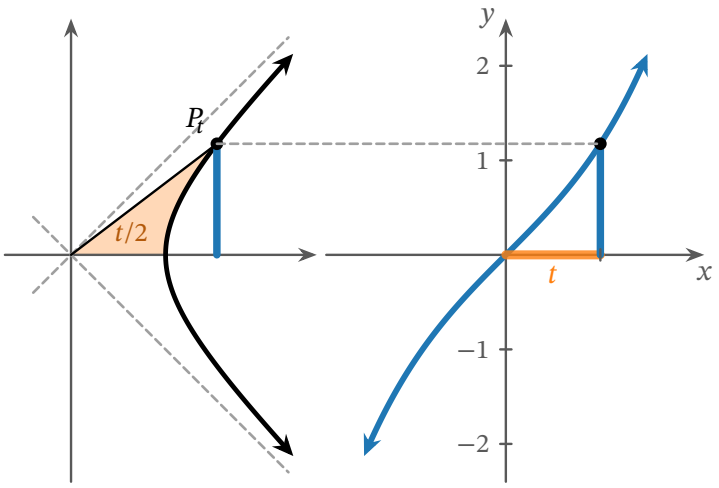


3. ábra. A koszinusz hiperbolikusz (piros) az $e^x/2$ és az $e^{-x}/2$ (szaggatott) összege, a szinusz hiperbolikusz (kék) a különbségük.

3. A szinusz hiperbolikusz és az area szinusz hiperbolikusz

3.1. A szinusz hiperbolikusz

Ha P_t végigfut a hiperbola jobb oldali ágán, második koordinátája $\sinh t$. Ezt t függvényében ábrázolva a szinusz hiperbolikusz grafikonját kapjuk (4. ábra), ahogyan az egységkörből a szinuszgörbét.



4. ábra. A szinusz hiperbolikusz az egységhiperbolából: a P_t pont magassága az $x = t$ helyen. A narancssárga szektor területe $t/2$.

Főbb tulajdonságai:

- $D_{\sinh} = \mathbb{R}$ és $R_{\sinh} = \mathbb{R}$;
- páratlan, és nem periodikus;
- szigorúan monoton nő, hiszen e^x nő, e^{-x} pedig csökken;
- egyetlen zérushelye van: $\sinh x = 0 \iff x = 0$.

3.2. Bijektív, leszűkítés nélkül

A szinusszal ellentétben a szinusz hiperbolikusz szigorúan monoton, tehát injektív: minden vízszintes egyenes legfeljebb egy pontban metszi a grafikonját (5. ábra). Mivel minden valós értéket fel is vesz,

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

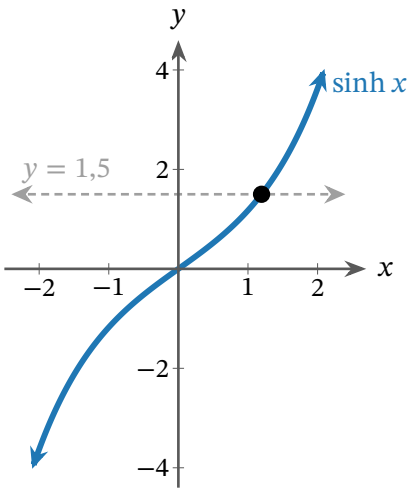
bijektív; semmit sem kell leszűkíteni.

3.3. Az area szinusz hiperbolikusz

3. Definíció. Az *area szinusz hiperbolikusz* a szinusz hiperbolikusz inverze:

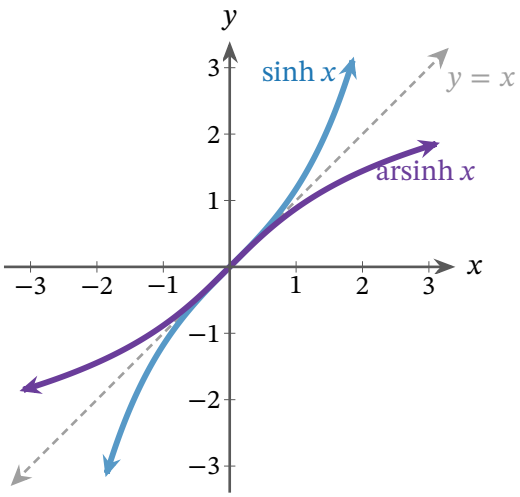
$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arsinh} y = x \iff \sinh x = y.$$

Az *area* (terület) név onnan ered, hogy $\operatorname{arsinh} y$ az a t, amelyre $\sinh t = y$, ez pedig a 1. ábra szerint a hiperbolikus szektor területének kétszerese. Grafikonja a szinusz hiperbolikusz grafikonjának tükörképe az $y = x$ egyenesre (6. ábra). Tulajdonságai:



5. ábra. A szinusz hiperbolikusz szigorúan monoton nő: minden vízszintes egyenes pontosan egy pontban metszi a grafikonját.

- $D_{\text{arsinh}} = R_{\text{arsinh}} = \mathbb{R}$;
- szigorúan monoton nő és páratlan.



6. ábra. Az area szinusz hiperbolikusz grafikonja (lila) a szinusz hiperbolikusz grafikonjának (halványkék) tükörképe az $y = x$ egyenesre.

4. Tétel. Minden $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{arsinh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Bizonyítás. Oldjuk meg a $\sinh x = y$ egyenletet x-re. Szorozzunk $2e^x$-szel:

$$e^{2x} - 2y\,e^x - 1 = 0.$$

Ez e^x-ben másodfokú, így

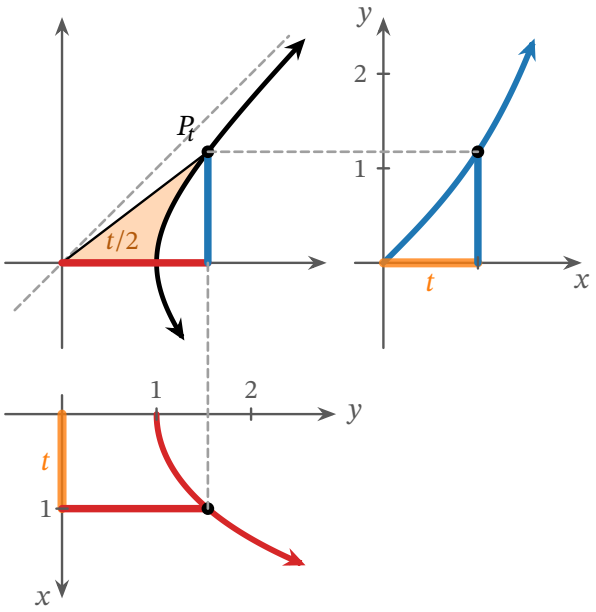
$$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

Mivel $\sqrt{y^2+1} > |y|$, a negatív előjelű gyök negatív, $e^x > 0$ pedig csak a pozitív lehet: $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$, és mindkét oldal logaritmusát véve kapjuk az állítást. □

4. A koszinusz hiperbolikusz és az area koszinusz hiperbolikusz

4.1. A koszinusz hiperbolikusz

A koszinusz hiperbolikusz P_t első koordinátája. Ahogy a szinusz hiperbolikuszt a P_t pont magasságából kaptuk, úgy a koszinusz hiperbolikusz az első koordinátájából adódik: most a t paramétert lefelé mérjük fel, és minden t helyen vízszintesen mérjük fel $\cosh t$-t (7. ábra). Így a grafikont elforgatva látjuk: a függőleges tengely mentén lefelé nő t, és a görbe 1-től indulva egyre gyorsabban távolodik.



7. ábra. A szinusz és a koszinusz hiperbolikusz az egységhiperbolából. A P_t pont magassága (kék) jobbra, első koordinátája (piros) lefelé kiterítve adja a két grafikont; a narancssárga szakaszok hossza t, a narancssárga szektor területe $t/2$.

Főbb tulajdonságai (8. ábra):

- $D_{\cosh} = \mathbb{R}$ és $R_{\cosh} = [1, \infty)$;
- páros, grafikonja az y tengelyre szimmetrikus;
- a $(-\infty, 0]$ intervallumon szigorúan monoton csökken, a $[0, \infty)$ intervallumon szigorúan monoton nő; minimuma $\cosh 0 = 1$.

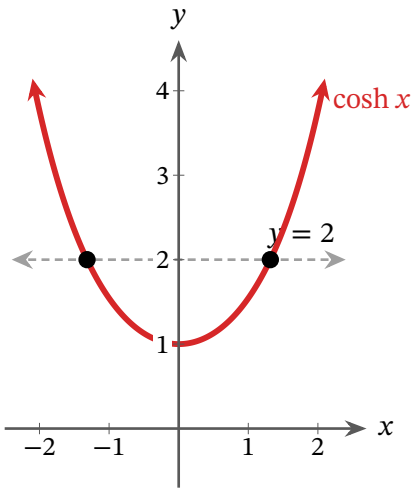
A grafikon alakja a *láncgörbe*: így lóg két végén felfüggesztett lánc vagy kábel.

4.2. Bijektívvé tétel

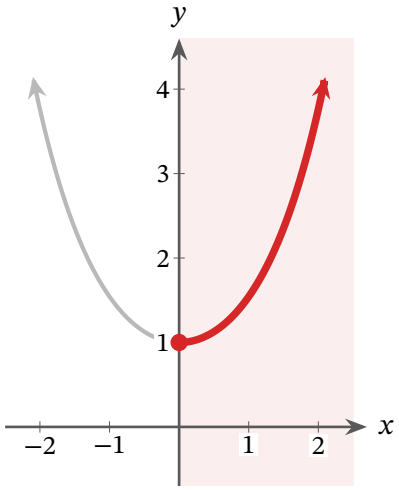
A koszinusz hiperbolikusz páros, ezért nem injektív: például $\cosh(-1) = \cosh 1$. A $[0, \infty)$ intervallumon viszont szigorúan monoton nő, és minden $[1, \infty)$-beli értéket pontosan egyszer vesz fel (9. ábra). Ezért a

$$\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$$

leszűkítés bijektív. Ez a koszinusz $[0, \pi]$-re való leszűkítésének párja.



8. ábra. A koszinusz hiperbolikusz nem injektív: az $y = 2$ egyenes két pontban metszi a grafikonját.



9. ábra. A koszinusz hiperbolikusz leszűkítése a $[0, \infty)$ intervallumra már szigorúan monoton.

4.3. Az area koszinusz hiperbolikusz

5. Definíció. Az *area koszinusz hiperbolikusz* a leszűkített koszinusz hiperbolikusz inverze:

$$\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \to [0, \infty), \qquad \operatorname{arcosh} y = x \iff \cosh x = y \text{ és } x \geq 0.$$

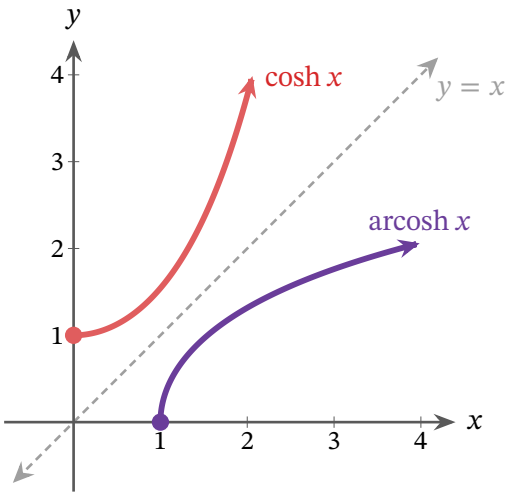
Tulajdonságai (10. ábra):

- $D_{\operatorname{arcosh}} = [1, \infty)$ és $R_{\operatorname{arcosh}} = [0, \infty)$;
- szigorúan monoton nő, és $\operatorname{arcosh} 1 = 0$.

6. Tétel. Minden $y \geq 1$ esetén

$$\operatorname{arcosh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Bizonyítás. A $\cosh x = y$ egyenletet $2e^x$-szel szorozva $e^{2x} - 2y\,e^x + 1 = 0$, így $e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$. Az $x \geq 0$ feltétel miatt $e^x \geq 1$; a két gyök szorzata 1, ezért ez a nagyobbik, $e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$. □



10. ábra. Az area koszinusz hiperbolikusz grafikonja (lila) a leszűkített koszinusz hiperbolikusz grafikonjának (halványpiros) tükörképe az $y = x$ egyenesre.

Megjegyzés. A $\cosh(\operatorname{arcosh} y) = y$ egyenlőség minden $y \geq 1$ esetén igaz, az $\operatorname{arcosh}(\cosh x)$ viszont nem mindig x: mivel az area koszinusz hiperbolikusz nemnegatív értéket ad, és a koszinusz hiperbolikusz páros,

$$\operatorname{arcosh}(\cosh x) = |x| \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

5. A tangens hiperbolikusz és az area tangens hiperbolikusz

5.1. A tangens hiperbolikusz

A tangens hiperbolikusz mindenütt értelmezve van, hiszen $\cosh x \geq 1 > 0$. Számlálót és nevezőt e^x-szel osztva

$$\tanh x = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}},$$

amiből látszik, hogy $x \to \infty$ esetén $\tanh x \to 1$, és a páratlanság miatt $x \to -\infty$ esetén $\tanh x \to -1$. A grafikonnak tehát vízszintes aszimptotái vannak (11. ábra). Főbb tulajdonságai:

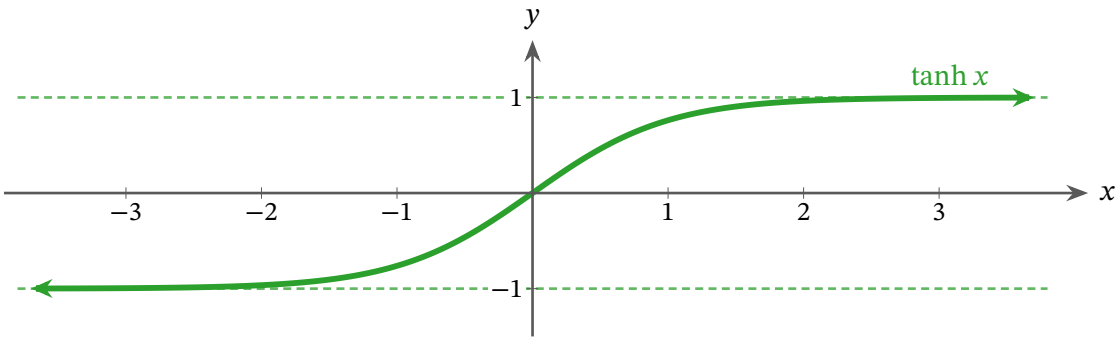
- $D_{\tanh} = \mathbb{R}$ és $R_{\tanh} = (-1, 1)$;
- páratlan, és nem periodikus;
- szigorúan monoton nő;
- egyetlen zérushelye van: $\tanh x = 0 \iff x = 0$.

5.2. Bijektív, leszűkítés nélkül

A tangens hiperbolikusz szigorúan monoton, tehát injektív, és a $(-1, 1)$ intervallum minden értékét felveszi. A képhalmazt az értékkészletre szűkítve

$$\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

bijektív; az értelmezési tartományt most sem kell leszűkíteni.



11. ábra. A tangens hiperbolikusz grafikonja. Az $y = \pm 1$ egyenesek (szaggatott) vízszintes aszimptoták; a függvény szigorúan monoton nő.

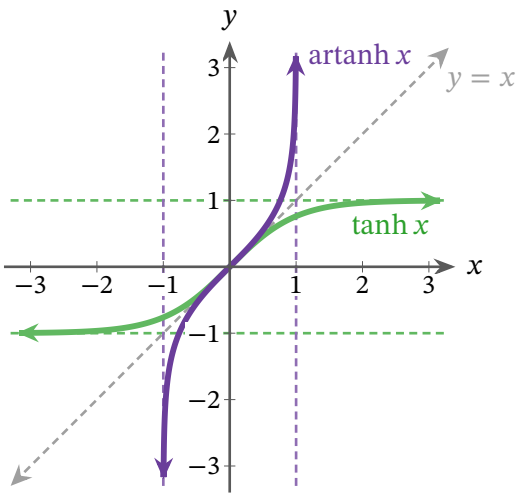
5.3. Az area tangens hiperbolikusz

7. Definíció. Az *area tangens hiperbolikusz* a tangens hiperbolikusz inverze:

$$\operatorname{artanh} : (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{artanh} y = x \iff \tanh x = y.$$

A tükrözés során a tangens hiperbolikusz vízszintes aszimptotáiból az area tangens hiperbolikusz függőleges aszimptotái lesznek: az $y = \pm 1$ egyenesekből az $x = \pm 1$ egyenesek (12. ábra). Tulajdonságai:

- $D_{\operatorname{artanh}} = (-1,1)$ és $R_{\operatorname{artanh}} = \mathbb{R}$;
- szigorúan monoton nő és páratlan;
- $\lim\limits_{y \to 1^-} \operatorname{artanh} y = \infty$ és $\lim\limits_{y \to -1^+} \operatorname{artanh} y = -\infty$.



12. ábra. Az area tangens hiperbolikusz grafikonja (lila) a tangens hiperbolikusz grafikonjának (halványzöld) tükörképe. A vízszintes aszimptotákból függőlegesek lesznek.

8. Tétel. Minden $y \in (-1,1)$ esetén

$$\operatorname{artanh} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}.$$

Bizonyítás. A $\tanh x = y$ egyenletben a számlálót és a nevezőt e^x-szel szorozva

$$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y \iff e^{2x} - 1 = y\,e^{2x} + y \iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y},$$

ahol $|y| < 1$ miatt a jobb oldal pozitív. Logaritmust véve és kettővel osztva kapjuk az állítást. □

6. Összefoglalás

Bijektív leszűkítés	Inverz
$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty)$	$\operatorname{arcosh} : [1,\infty) \to [0,\infty)$
$\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$	$\operatorname{artanh} : (-1,1) \to \mathbb{R}$

Az inverzek logaritmussal is kifejezhetők:

$$\operatorname{arsinh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right), \qquad \operatorname{arcosh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right), \qquad \operatorname{artanh} y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}.$$

A trigonometrikus függvényekkel összevetve: ott mindhárom függvényt le kellett szűkíteni, mert periodikusak; itt csak a koszinusz hiperbolikuszt, mert páros. A szinusz és a tangens hiperbolikusz szigorúan monoton, így eleve injektív. A recept viszont ugyanaz:

1. ha kell, olyan intervallumra szűkítünk, ahol a függvény szigorúan monoton (így injektív);
2. a képhalmazt az értékkészletre szűkítjük (így szürjektív);
3. a kapott bijekciót invertáljuk; az inverz grafikonja a függvény grafikonjának tükörképe az $y = x$ egyenesre.