Trigonometrikus függvények és inverzeik

Analízis A1 – segédanyag

Sándor Tibor

Ebben a jegyzetben a szinusz, a koszinusz és a tangens függvényt az egységkörből építjük fel, majd mindhármat invertáljuk. Mivel egyik sem kölcsönösen egyértelmű, előbb egy alkalmas intervallumra szűkítjük őket; így kapjuk az arkusz szinusz, az arkusz koszinusz és az arkusz tangens függvényt.

1. Az egységkör

Az *egységkör* az origó középpontú, egységnyi sugarú kör:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

A szögeket *radiánban* mérjük: egy φ szög nagysága annak az ívnek a hossza, amelyet a szög az egységkörből kimetsz. A teljes kör kerülete 2π, így $360° = 2\pi$, $180° = \pi$.

1. Definíció. Induljunk el az $(1, 0)$ pontból, és haladjunk az egységkörön φ hosszú utat; ha $\varphi > 0$, az óramutató járásával ellentétesen, ha $\varphi < 0$, akkor azzal megegyezően. Jelölje P_φ azt a pontot, ahová érkezünk. Ekkor

$$\cos\varphi := P_\varphi \text{ első koordinátája}, \qquad \sin\varphi := P_\varphi \text{ második koordinátája}.$$

Ha $\cos\varphi \neq 0$, akkor

$$\tan\varphi := \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

A tangensnek is van szemléletes jelentése: az OP_φ egyenes az $x = 1$ érintőt az $(1, \tan\varphi)$ pontban metszi. Ez a hasonló háromszögekből látszik: a két derékszögű háromszögben a függőleges és a vízszintes befogó aránya ugyanaz,

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\tan\varphi}{1}.$$

1.1. Alapvető összefüggések

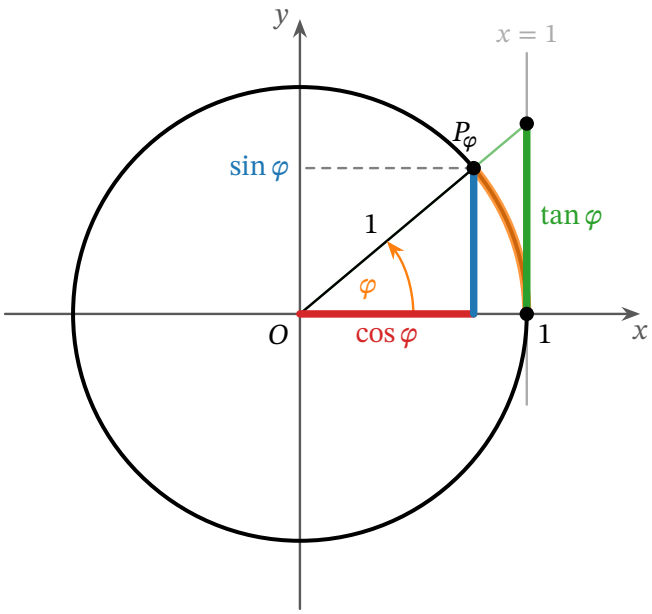
Mivel P_φ rajta van az egységkörön, koordinátái kielégítik a kör egyenletét. Ez a *trigonometrikus Pitagorasz-tétel*:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \qquad (\varphi \in \mathbb{R}).$$

Egy teljes kört megtéve ugyanoda érkezünk, ezért $P_{\varphi+2\pi} = P_\varphi$, vagyis

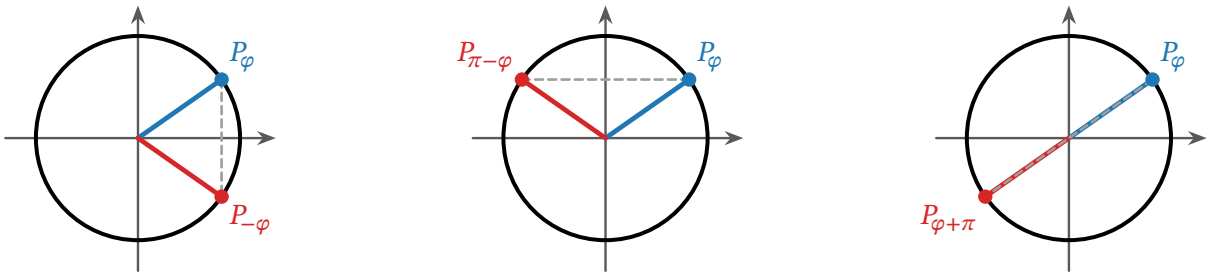
$$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi, \qquad \cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi.$$

A többi azonosság a kör szimmetriáiból olvasható le (2. ábra):



1. ábra. Az φ szöghöz tartozó P_φ pont az egységkörön. A narancssárga ív hossza φ; a piros szakasz $\cos\varphi$, a kék $\sin\varphi$, a zöld $\tan\varphi$.

- az x tengelyre tükrözve P_φ-ból $P_{-\varphi}$ lesz: $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ és $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$, azaz a koszinusz páros, a szinusz páratlan;
- az y tengelyre tükrözve P_φ-ból $P_{\pi-\varphi}$ lesz: $\sin(\pi-\varphi) = \sin\varphi$ és $\cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi$;
- az origóra tükrözve P_φ-ból $P_{\varphi+\pi}$ lesz: mindkét koordináta előjelet vált, így $\tan(\varphi+\pi) = \tan\varphi$.



2. ábra. Tükrözés az x tengelyre, az y tengelyre és az origóra.

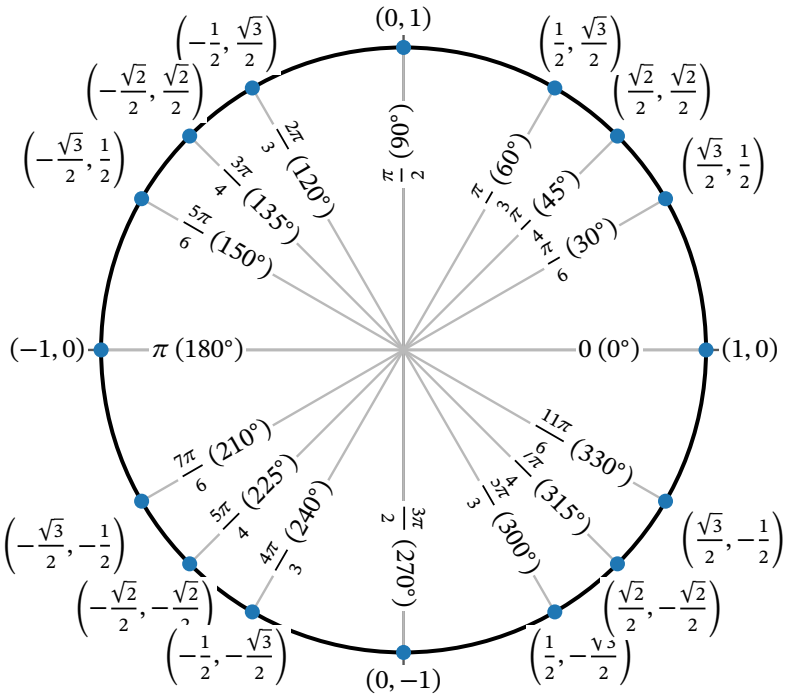
1.2. Nevezetes szögek

Az alábbi értékeket érdemes fejből tudni. A $\pi/4$ szögnél egy egyenlő szárú derékszögű háromszög, a $\pi/6$ és a $\pi/3$ szögnél egy félbevágott szabályos háromszög adja az értékeket; a többi negyedben a szimmetriák segítségével kapjuk meg őket (3. ábra).

2. Inverz függvény

Egy $f : A \to B$ függvény

- *injektív*, ha különböző pontokban különböző értéket vesz fel: $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$;



3. ábra. A nevezetes szögek az egységkörön. A sugarakon a szög radiánban és fokban, a pontok mellett a koordinátáik, $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ olvasható.

- *szürjektív*, ha minden $y \in B$ előáll $f(x)$ alakban, azaz $R_f = B$;
- *bijektív* (kölcsönösen egyértelmű), ha injektív és szürjektív is.

2. Definíció. Ha $f : A \to B$ bijektív, akkor minden $y \in B$-hez pontosan egy olyan $x \in A$ létezik, amelyre $f(x) = y$. Az így kapott $f^{-1} : B \to A$, $f^{-1}(y) := x$ függvény f *inverze*. Ekkor

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad (x \in A) \qquad \text{és} \qquad f\big(f^{-1}(y)\big) = y \quad (y \in B).$$

Az inverz grafikonját úgy kapjuk, hogy f grafikonját tükrözzük az $y = x$ egyenesre: ha (a, b) rajta van f grafikonján, akkor (b, a) rajta van f^{-1} grafikonján.

Egy szigorúan monoton függvény mindig injektív. Ha tehát egy függvény nem injektív, akkor értelmezési tartományát leszűkíthetjük egy olyan intervallumra, ahol szigorúan monoton; a képhalmazt pedig az értékkészletre szűkítve szürjektívvé tehetjük. Pontosan ezt tesszük a trigonometrikus függvényekkel.

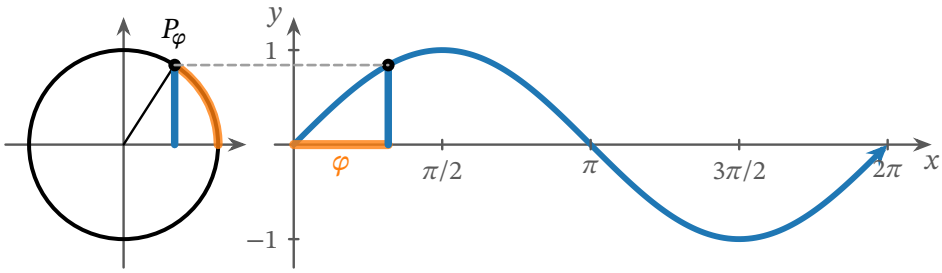
3. A szinusz és az arkusz szinusz

3.1. A szinuszfüggvény

Ha P_φ körbejár az egységkörön, második koordinátája -1 és 1 között hullámzik. Ha ezt a magasságot φ függvényében ábrázoljuk, a szinuszgörbét kapjuk (4. ábra): az egységkör ívét „kiterítjük” az x tengelyre.

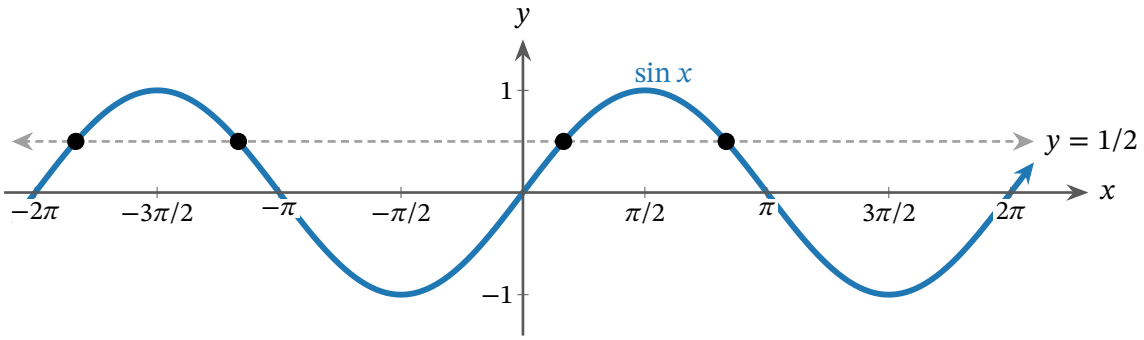
Az egységkörös definícióból és az előző fejezet azonosságaiból a szinusz főbb tulajdonságai:

- $D_{\sin} = \mathbb{R}$ és $R_{\sin} = [-1, 1]$;



4. ábra. A szinuszgörbe az egységkörből: a P_φ pont magassága az $x = \varphi$ helyen.

- 2π szerint periodikus: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$;
- páratlan: $\sin(-x) = -\sin x$, grafikonja az origóra szimmetrikus;
- zérushelyei: $\sin x = 0 \iff x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.



5. ábra. A szinusz nem injektív: az $y = 1/2$ egyenes végtelen sok pontban metszi a grafikonját.

3.2. Bijektívvé tétel

A szinusz nem injektív, hiszen például

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{13\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

(5. ábra), így nem is invertálható. A $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumon viszont szigorúan monoton nő, és közben minden $[-1, 1]$-beli értéket pontosan egyszer vesz fel (6. ábra). Ezért a

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

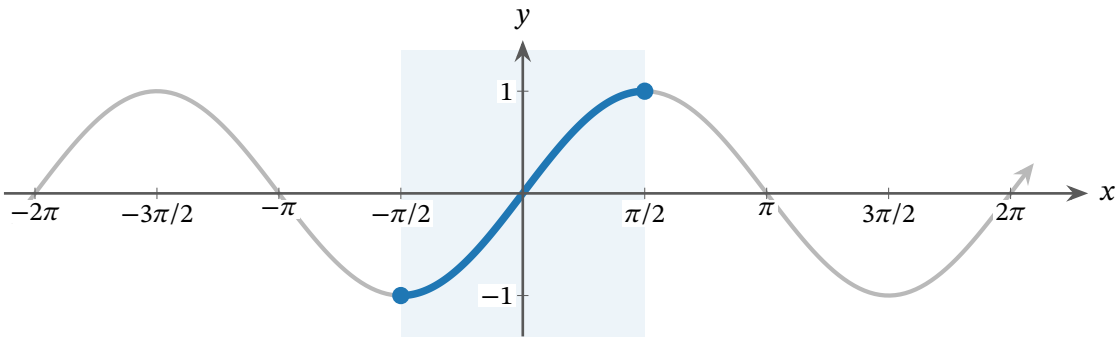
leszűkítés bijektív. Más intervallumot is választhatnánk (például $[\pi/2, 3\pi/2]$-t), de ez a megszokott választás.

3.3. Az arkusz szinusz

3. Definíció. Az *arkusz szinusz* a leszűkített szinusz inverze:

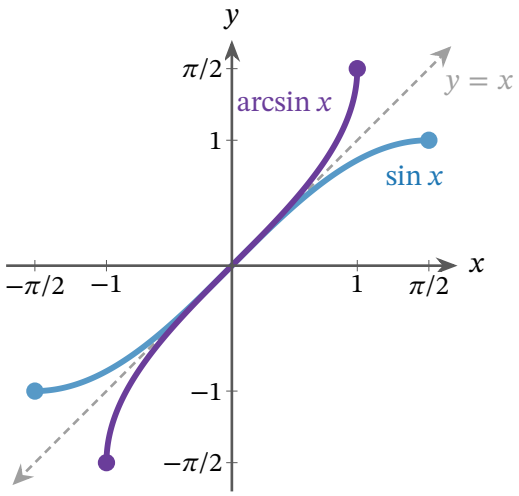
$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \arcsin y = x \iff \sin x = y \text{ és } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Szavakban: $\arcsin y$ az a $[-\pi/2, \pi/2]$-beli szög, amelynek szinusza y. Grafikonját a leszűkített szinusz grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe adja (7. ábra). Az inverz tulajdonságai a szinuszéból következnek:



6. ábra. A szinusz leszűkítése a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumra már szigorúan monoton.

- $D_{\arcsin} = [-1, 1]$ és $R_{\arcsin} = [-\pi/2, \pi/2]$;
- szigorúan monoton nő;
- páratlan: $\arcsin(-y) = -\arcsin y$.



7. ábra. Az arkusz szinusz grafikonja (lila) a leszűkített szinusz grafikonjának (halványkék) tükörképe az $y = x$ egyenesre.

Megjegyzés. A $\sin(\arcsin y) = y$ egyenlőség minden $y \in [-1, 1]$ esetén igaz, az $\arcsin(\sin x) = x$ viszont *csak* $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ esetén! Az arkusz szinusz ugyanis mindig $[-\pi/2, \pi/2]$-beli értéket ad.

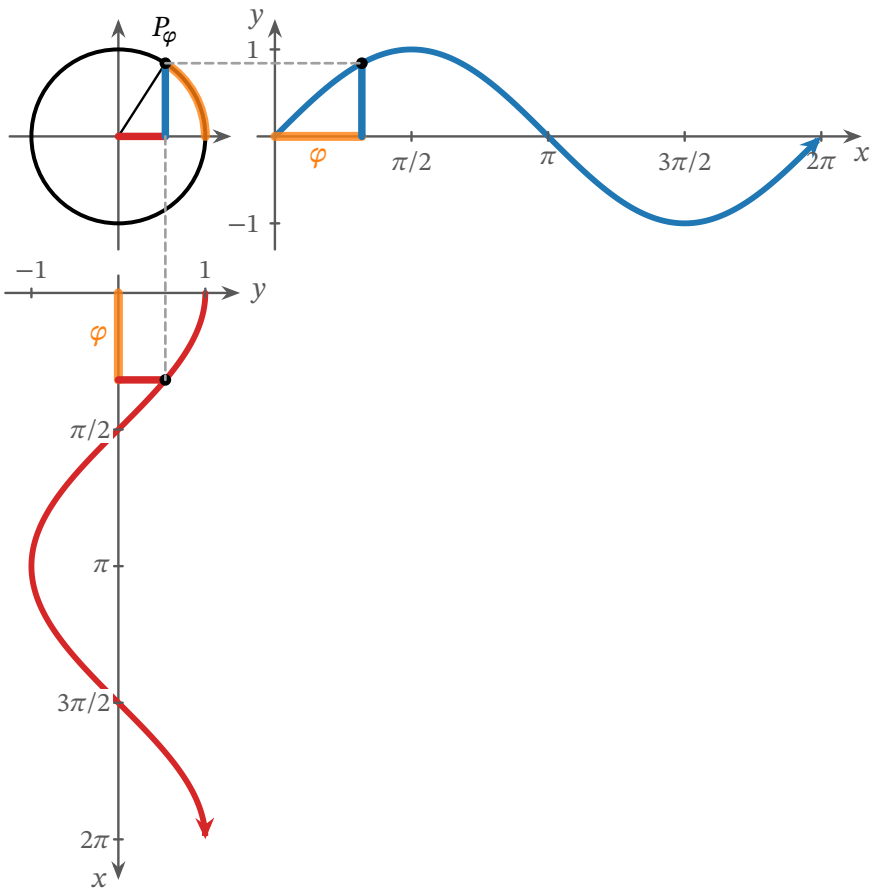
4. A koszinusz és az arkusz koszinusz

4.1. A koszinuszfüggvény

A koszinusz P_φ első koordinátája. Ahogy a szinuszgörbét a P_φ pont magasságából kaptuk, úgy a koszinusz grafikonja az első koordinátájából adódik: most az egységkör ívét lefelé terítjük ki, és minden φ helyen vízszintesen mérjük fel $\cos\varphi$-t (8. ábra). Így a koszinuszgörbét elforgatva látjuk: a függőleges tengely mentén lefelé nő φ, és a görbe vízszintesen hullámzik -1 és 1 között.

Az egységkörön negyed fordulattal elforgatva azt is kapjuk, hogy

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$



8. ábra. A szinusz- és a koszinuszgörbe az egységkörből. A P_φ pont magassága (kék) jobbra, első koordinátája (piros) lefelé kiterítve adja a két grafikont; a narancssárga szakaszok hossza φ.

vagyis a koszinusz grafikonja a szinuszgörbe $\pi/2$-vel balra eltolva (9. ábra). Főbb tulajdonságai:

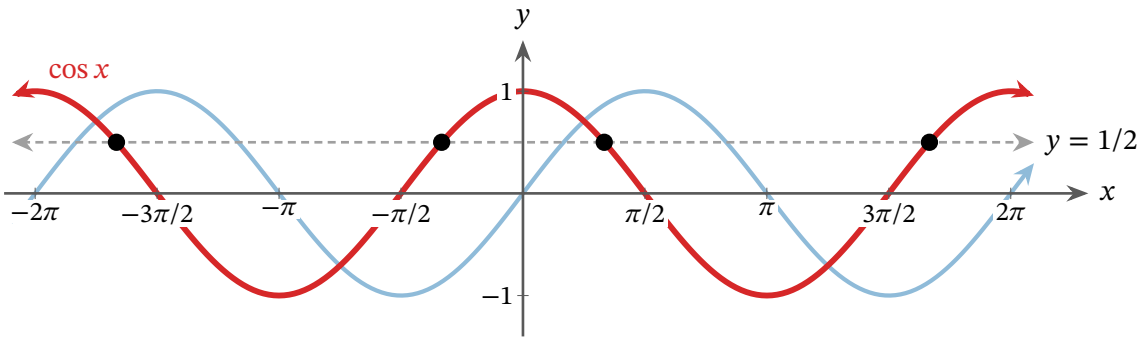
- $D_{\cos} = \mathbb{R}$ és $R_{\cos} = [-1, 1]$;
- 2π szerint periodikus: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$;
- páros: $\cos(-x) = \cos x$, grafikonja az y tengelyre szimmetrikus;
- zérushelyei: $\cos x = 0 \iff x = \pi/2 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

4.2. Bijektívvé tétel

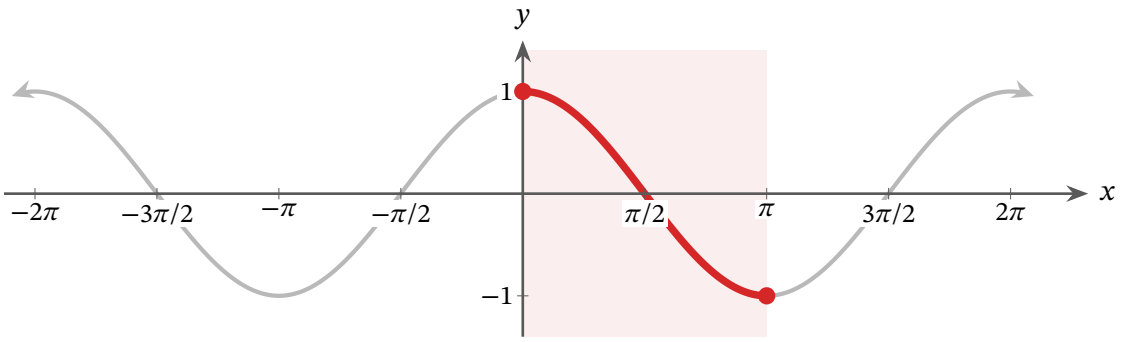
A koszinusz sem injektív: például $\cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2$. Mivel páros, a 0-t tartalmazó szimmetrikus intervallum most nem jó. A $[0, \pi]$ intervallumon viszont szigorúan monoton *csökken*, és minden $[-1, 1]$-beli értéket pontosan egyszer vesz fel (10. ábra). Ezért a

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

leszűkítés bijektív.



9. ábra. A koszinusz grafikonja (piros) a szinuszgörbe (halványkék) $\pi/2$-vel balra tolva. A koszinusz sem injektív.



10. ábra. A koszinusz leszűkítése a $[0, \pi]$ intervallumra már szigorúan monoton.

4.3. Az arkusz koszinusz

4. Definíció. Az *arkusz koszinusz* a leszűkített koszinusz inverze:

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi], \qquad \arccos y = x \iff \cos x = y \text{ és } x \in [0, \pi].$$

Tulajdonságai (11. ábra):

- $D_{\arccos} = [-1, 1]$ és $R_{\arccos} = [0, \pi]$;
- szigorúan monoton csökken;
- nem páros és nem páratlan, de grafikonja a $(0, \pi/2)$ pontra szimmetrikus: $\arccos(-y) = \pi - \arccos y$.

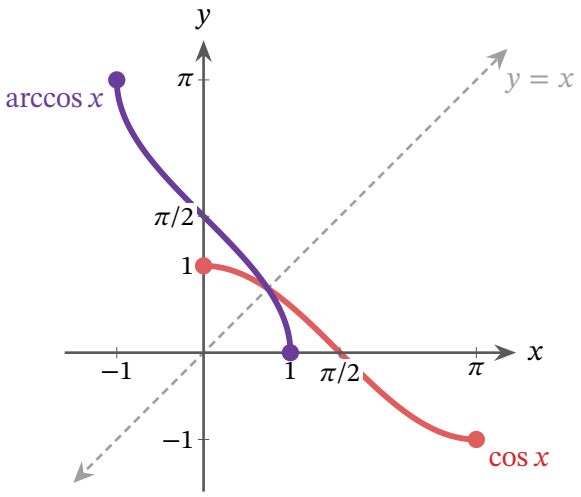
5. Tétel. Minden $y \in [-1, 1]$ esetén

$$\arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2}.$$

Bizonyítás. Legyen $x = \arcsin y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Ekkor $\pi/2 - x \in [0, \pi]$, és

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = y,$$

tehát $\arccos y = \pi/2 - x = \pi/2 - \arcsin y$. □



11. ábra. Az arkusz koszinusz grafikonja (lila) a leszűkített koszinusz grafikonjának (halványpiros) tükörképe az $y = x$ egyenesre.

5. A tangens és az arkusz tangens

5.1. A tangensfüggvény

A tangens ott van értelmezve, ahol a koszinusz nem nulla:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad D_{\tan} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Az egységkörön ez az OP_φ egyenes és az $x = 1$ érintő metszéspontjának magassága (1. ábra). Ha $\varphi \to \pi/2$ alulról, az egyenes egyre meredekebb, és a metszéspont a végtelenbe tart; ezért a tangens grafikonjának függőleges aszimptotái vannak az $x = \pi/2 + k\pi$ helyeken (12. ábra). Főbb tulajdonságai:

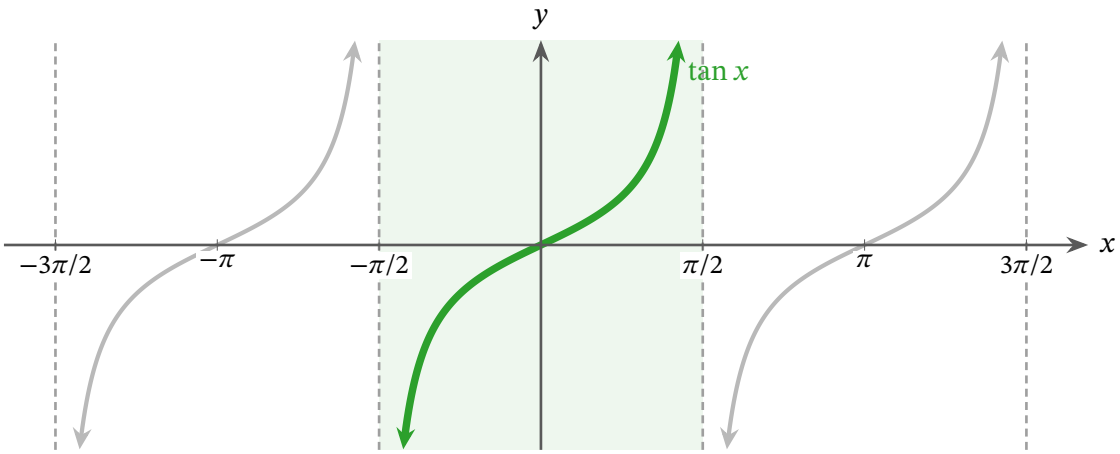
- $R_{\tan} = \mathbb{R}$;
- π szerint periodikus: $\tan(x + \pi) = \tan x$;
- páratlan: $\tan(-x) = -\tan x$;
- zérushelyei: $\tan x = 0 \iff x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

5.2. Bijektívvé tétel

A tangens π szerint periodikus, így nem injektív. A $(-\pi/2, \pi/2)$ *nyílt* intervallumon viszont szigorúan monoton nő, és minden valós értéket pontosan egyszer vesz fel. A végpontokat nem vehetjük hozzá, mert ott a tangens nincs értelmezve. Így a

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

leszűkítés bijektív.



12. ábra. A tangens grafikonja. A szaggatott függőleges egyenesek az aszimptoták; a $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumon (zöld) a tangens szigorúan monoton nő.

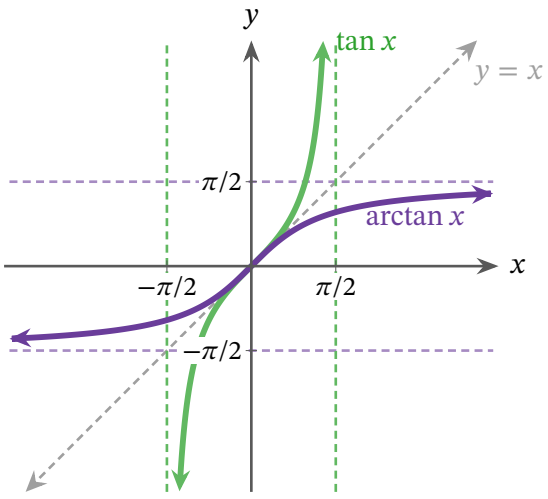
5.3. Az arkusz tangens

6. Definíció. Az *arkusz tangens* a leszűkített tangens inverze:

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad \arctan y = x \iff \tan x = y \text{ és } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

A tükrözés során a tangens függőleges aszimptotáiból vízszintes aszimptoták lesznek (13. ábra). Tulajdonságai:

- $D_{\arctan} = \mathbb{R}$ és $R_{\arctan} = (-\pi/2, \pi/2)$;
- szigorúan monoton nő és páratlan;
- $\lim\limits_{y\to\infty} \arctan y = \pi/2$ és $\lim\limits_{y\to-\infty} \arctan y = -\pi/2$.



13. ábra. Az arkusz tangens grafikonja (lila) a leszűkített tangens grafikonjának (halványzöld) tükörképe. A tangens függőleges aszimptotáiból az arkusz tangens vízszintes aszimptotái lesznek.

6. Összefoglalás

Bijektív leszűkítés	Inverz
$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$	$\arcsin: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos: [0,\pi] \to [-1,1]$	$\arccos: [-1,1] \to [0,\pi]$
$\tan: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$	$\arctan: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Mindhárom esetben ugyanazt a receptet követtük:

1. megkerestünk egy intervallumot, ahol a függvény szigorúan monoton (így injektív), és minden értékét felveszi;
2. a képhalmazt az értékkészletre szűkítettük (így szürjektív);
3. a kapott bijekciót invertáltuk; az inverz grafikonja a leszűkített függvény grafikonjának tükörképe az $y = x$ egyenesre.

Az inverz függvénybe helyettesítés mindig visszaadja az eredeti értéket ($\sin(\arcsin y) = y$), fordítva azonban csak a leszűkített intervallumon ($\arcsin(\sin x) = x$ csak ha $x \in [-\pi/2, \pi/2]$).